Problèmes de satisfaction de contraintes

Systèmes décisionnels et programmation avancée III

Philippe Muller

2012-2013

Plan du cours

- satisfaction de contraintes et applications
- définitions
- la consistance d'arcs
- algorithmes classiques : back-track, forward-checking, MAC
- méthodes par ordonnancement de variables
- méta-heuristiques et contraintes

Systèmes de contraintes

- version encore plus simplifiée formellement d'un processus de raisonnement
- uniquement des "faits" : variables avec domaines restreints + relations entre variables
- recherche d'instances des variables satisfaisant les relations ("contraintes")
- applications : emploi du temps, occupation de salles, gestion de configuration
- un cas particulier de recherche dans un espace de solutions combinatoires (cf espace d'états)
- correspond à des cas où les formes des solutions sont difficiles à prévoir
- existence d'algorithmes spécialisés

Un exemple simple : le “coloriage” de graphe

G $= (N, A)$ un graphe donné par des sommets $u \in N$ et des arcs $(u, v) \in A$

Un ensemble de couleurs C, de taille $|C| = p$

Coloriage = attribuer un élément de C à chaque sommet, $c(u)$, tel que

$$(u, v) \in A \rightarrow c(u) \neq c(v)$$

s’applique à tous les problèmes de gestion d’incompatibilité : par exemple assigner des employés à des bureaux, sans mettre ensemble des gens qui ne s’entendent pas.

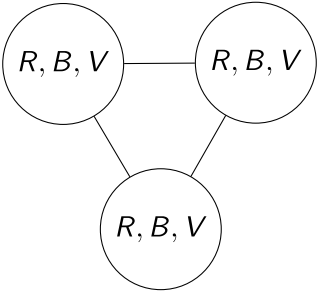
Systèmes de contraintes

- des variables $\{V_1, V_2, V_3, ...\}$
- des domaines de valeurs : $V_1 \in D_1, V_2 \in D_2, ...$
- des contraintes entre variables : ex $V_1 \neq V_2$, $V_3 \leq V_4$
- qui définissent des tuples possibles de valeurs sur les domaines : $C_{ij...} = \{(x_i, y_j, ...) \in D_i \times D_j \times ...\}$

Une modélisation du coloriage

$N = \{u_1, ..., u_n\}$
$C = \{c_1, ..., c_p\}$
posons $|A| = m$
variables V_i = couleur du sommet u_i
pour tout i, $V_i \in C$. les domaines sont tous les mêmes $D_i = C$
contraintes : pour chaque arc (u_i, u_j) de A, $V_i \neq V_j$
(m contraintes, entre 2 variables seulement pour chaque)

Exemple



Représentation explicite des contraintes

- contrainte sur variables = liste d'assignations possibles de ces variables
- exemple sur le coloriage, contrainte sur u_1 et u_2 :
  $C_{1,2} = \{(R, B), (R, V), (B, V), (B, R), (V, B), (V, R)\}$

Restrictions

- domaines des variables finis
- contraintes **binaires**, $C_{x_i x_j}$ entre 2 variables x_i et x_j

NB : si les domaines sont finis, toute contrainte entre n variables peut se réexprimer avec des contraintes binaires (pas forcément simplement).

Caractéristiques de la formulation par contraintes

- très générale : permet d'encoder de nombreux problèmes
- très utilisée en pratique
- mais : inclut des problèmes difficiles (*NP-difficiles*)

Deux aspects

- modélisation
  - choisir les bonnes variables !
  - influe sur le nombre de contraintes
  - influe sur la complexité des contraintes
  - $\rightarrow$ influe sur la difficulté à résoudre
- résolution : un compromis entre
  - l'inférence sur les domaines des variables (*propagation de contraintes*)
  - l'exploration des possibilités d'affectation

Propagation de contraintes : consistance d'arc

"arc consistency"

On peut éliminer les valeurs d'un domaine qui ne sont dans aucune solution

Exemple : si $D_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $D_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
et que la contrainte est $X_1 > X_2$
que peut-on éliminer ?

"arc consistency"

On peut éliminer les valeurs d'un domaine qui ne sont dans aucune solution

Exemple : si $D_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $D_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

et que la contrainte est $X_1 > X_2$

que peut-on éliminer ?

de D_1 : 1

Propagation de contraintes : consistance d'arc

"arc consistency"

On peut éliminer les valeurs d'un domaine qui ne sont dans aucune solution

Exemple : si $D_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $D_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

et que la contrainte est $X_1 > X_2$

que peut-on éliminer ?

de D_1 : 1

de D_2 : 4

Propagation de contraintes : consistance d'arc

Définition

une contrainte/un arc $\langle X, Y \rangle$entre deux variables X, Y de domaines D_X, D_Y est arc-consistante si et seulement si

- pour toute valeur de D_X, il existe une valeur de D_Y qui satisfait la contrainte
- pour toute valeur de D_Y, il existe une valeur de D_X qui satisfait la contrainte

Propagation de contraintes : consistance d'arc

Définition

une contrainte/un arc $\langle X, Y\rangle$entre deux variables X, Y de domaines D_X, D_Y est arc-consistante si et seulement si

- pour toute valeur de D_X, il existe une valeur de D_Y qui satisfait la contrainte
- pour toute valeur de D_Y, il existe une valeur de D_X qui satisfait la contrainte

Exemple : si $D_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $D_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
et que la contrainte est $X_1 > X_2$
pour 1$\in$ D_1, aucun élément de D_2 ne satisfait la contrainte
pour 4$\in$ D_1, aucun élément de D_2 ne satisfait la contrainte

Propagation de contraintes : consistance d'arc

→ un moyen simple de simplifier la résolution : forcer l'arc-consistance, en éliminant les valeurs qui ne la respectent pas, pour chaque arc
on garde une table dynamique de domaines
(initialisée par copie des domaines complets)

procedure REVISE1(X,Y)
  for all $x_i \in D_X$ **do**
    if il n'y a pas de $y_i \in Y$ tel que $\langle x_i, y_i \rangle \in C_{ij}$ **then**
      $D_X = D_X / \{x_i\}$
    end if
  end for
  if D_X a été modifié **then**
    renvoie Vrai
  end if
end procedure

```
procedure REVISE2(X,Y)
    for all y_i ∈ D_Y do
        if il n'y a pas de x_i ∈ X tel que ⟨x_i, y_i⟩ ∈ C_ij then
            D_Y = D_Y/{y_i}
        end if
    end for
    if D_Y a été modifié then
        renvoie Vrai
    end if
end procedure
```

version brutale : AC1 : arc consistency 1

procedure PROPAGE(CSP)
    while un domaine a été purgé **do**
        for all $C_{XY} = (X, Y) \in$ CSP **do**
            revise1(X, Y)
            revise2(X, Y)
        end for
    end while
end procedure

version plus efficace : AC-3 on garde la trace des domaines modifiés

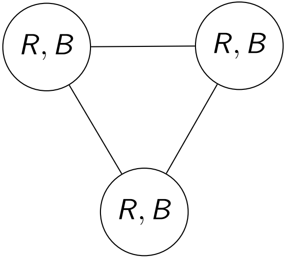
procedure PROPAGE-3(CSP)
  Q = ensemble des variables
  while Q non vide **do**
    change = {}
    for all $C_{XY} = (X, Y) \in$CSP tels que $X \in Q$ *ou* $Y \in Q$
do
      if revise1(X, Y) **then**
        $change = change \cup \{X\}$
      end if
      if revise2(X, Y) **then**
        $change = change \cup \{Y\}$
      end if
    end for
    Q = change
  end while
end procedure

Exercices

- dérouler l'algorithme AC3 sur l'instance de coloration suivante : trois sommets A, B, C avec les couleurs possibles, respectivement {r,b,v}, {r,v}, {v}
- modéliser le problèmes des 4-reines sous forme de contraintes
- appliquer la consistance d'arc pour éliminer des affectations dans le problème des 3-reines
- modéliser le problème d'ordonnancement suivant : on a 4 tâches à réaliser de durées 5, 1, 3, 4
  les tâches 2 et 3 ne peuvent être faites en parallèle (mêmes ressources nécessaires), et la 3 doit être faite avant la 4.
  peut-on avoir toutes les tâches commencées avant le temps t=5 ?

Insuffisance de la consistance d'arc

"filtre" des mauvaises solutions, mais ne suffit pas toujours à trouver une solution complète
ne suffit pas non plus à filtrer toutes les mauvaises solutions :



Résolution complète

d'une façon générale, le problème peut être abordé en essayant toutes les assignations possibles (exploration)
$\rightarrow$ problème combinatoire
$\rightarrow$ techniques de résolution générales, cf partie Matthieu Serrurier
en pratique, on va se servir des spécificités du cadre pour raffiner les méthodes générales
notamment en combinant avec la notion de consistance

Méthodes d'exploration générales

espace d'état : des assignations partielles de variables

état initial : CSP complet

état solution : assignation complète cohérente

opérateur sur un état : assigner une valeur à une variable sans violer de contraintes

ordre d'assignation des variables pas importants ? on le fixe pour réduire le nombre d'états

chaque état correspond à une "profondeur" i : nb de variables instanciées

procedure EXPLORE(CSP)
  Q $= \{E_0\}$
  while Q non vide **do**
    courant = choisir_dans(Q)
    if courant n'est pas solution **then**
      new = { instantier la variable $x_{profondeur(courant)}$}
      Q = Q $\cup$ new
    else

Quelles options ?

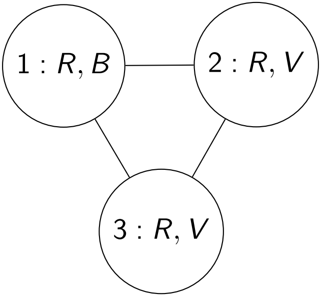
- profondeur/largeur d'abord
- "meilleur" d'abord, selon critère à définir
- ordre des variables en pratique : important pour la performance
- taille de l'espace d'états ?

Profondeur d'abord

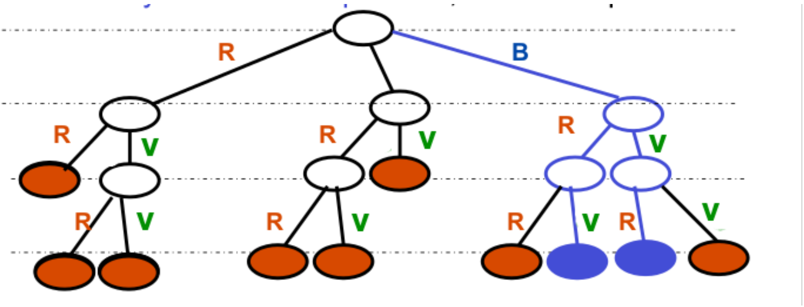
$\equiv$ instancier les valeurs en séquence
une spécificité du problème : on peut arrêter d'explorer si une instantiation est incohérente, et revenir à la valeur précédente ("backtrack") $\rightarrow$ on teste la cohérence à chaque instantiation
version ajustée de l'algorithme
Variables X_i, domaines D_i, ordonnées.

```
procedure BACKTRACK(CSP)
    i = 1                                          ▷ profondeur
    a = {}                 ▷ assignation de valeurs aux variables
    D'_1 = copie(D_1)
    while 1 ≤ i ≤ n do
        x = select_valeur(a,D'_i)       ▷ D'_i est modifié, x étend a
        if x est "rien"  then
            i = i - 1                                  ▷ backtrack
        else
            i = i + 1
            D'_i = copie(D_i)    ▷ copie le domaine de la var suivante
        end if
    end while
    if i=0 then
        CSP incohérent
    else
        a contient les assignations de variables pour une solution
    end if
end procedure
```

Exemple : coloration



Coloration



Exercice : 3-reines

Exercice : 3-reines

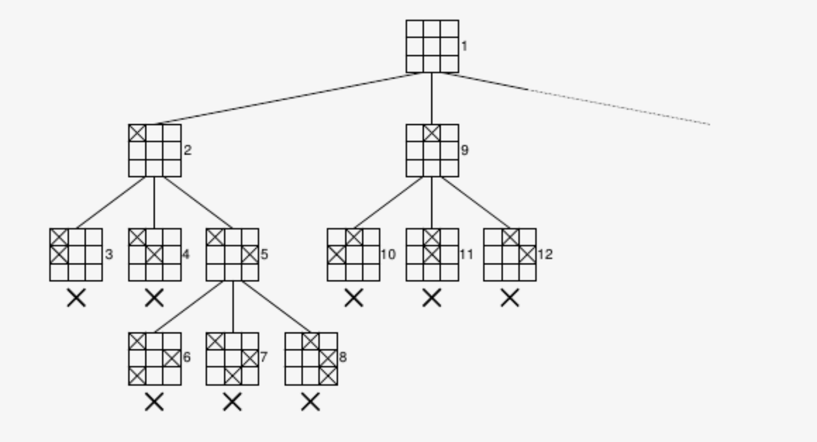


figure : Pierre Lopez

Exercice : 4-reines

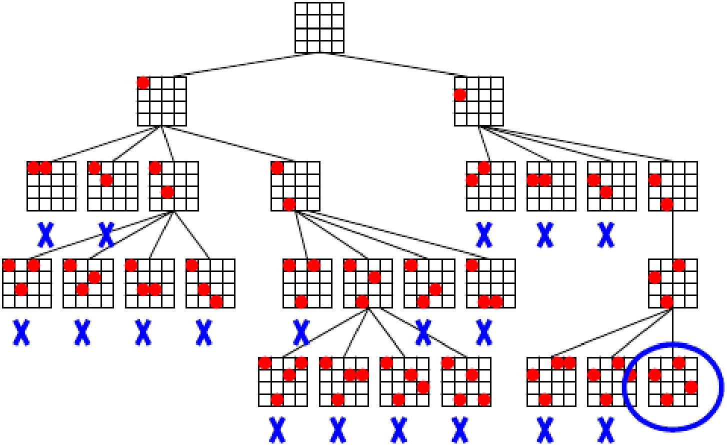


figure : Roman Bartak

Combiner la propagation de contraintes et l'exploration

n = $\|$variables$\|$, c = $\|$contraintes$\|$, k = taille max domaine
à chaque assignation on peut faire une propagation/ test d'arc consistence
mais : question de performances
complexité des procédures ?

ac1 :

ac3 :

d'où compromis : consistance partielle

Combiner la propagation de contraintes et l'exploration

$n = \|variables\|$, $c = \|contraintes\|$, k = taille max domaine
à chaque assignation on peut faire une propagation/ test d'arc consistence
mais : question de performances
complexité des procédures ?

ac1 : au pire
(revise * 2 * nb de contraintes) * nb variable * taille max
revise = o(taille max au carré)

ac3 :

d'où compromis : consistance partielle

n = ||variables||, c = ||contraintes||, k = taille max domaine
à chaque assignation on peut faire une propagation/ test d'arc consistence
mais : question de performances
complexité des procédures ?

ac1 : au pire
(revise * 2 * nb de contraintes) * nb variable * taille max
revise = o(taille max au carré) nck^3

ac3 :

d'où compromis : consistance partielle

Combiner la propagation de contraintes et l'exploration

n = ||variables||, c = ||contraintes||, k = taille max domaine
à chaque assignation on peut faire une propagation/ test d'arc consistence
mais : question de performances
complexité des procédures ?

ac1 : au pire
(revise * 2 * nb de contraintes) * nb variable * taille max
revise = o(taille max au carré) nck^3

ac3 : on économise de repasser chaque variable

d'où compromis : consistance partielle

n = ||variables||, c = ||contraintes||, k = taille max domaine
à chaque assignation on peut faire une propagation/ test d'arc consistence
mais : question de performances
complexité des procédures ?

ac1 : au pire
(revise * 2 * nb de contraintes) * nb variable * taille max
revise = o(taille max au carré) nck^3

ac3 : on économise de repasser chaque variable ck^3

d'où compromis : consistance partielle

Forward-checking

test de consistance "vers l'avant" :

- propager les contraintes concernant la dernière variable instantiée
  (o(ck))
- algo de back-track
- gestion des domaines plus complexes

Application à la coloration

{r,b,v}, {r,v}, {v}

```
procedure FORWARD-CHECKING(CSP)
    i = 0                                          ▷ profondeur
    a = {}                     ▷ assignation de valeurs aux variables
    pour tout j D'_j = copie(D_j)          ▷ copie tous les domaines
    while 1 ≤ i ≤ n do
        x = select_valeur_FC(a,i,{D'_j})   ▷ D'_j modifiables, x étend a
        if x est "rien" then
            i = i - 1                                  ▷ backtrack
        else
            i = i + 1
        end if
    end while
    if i=0 then
        CSP incohérent
    else
        a contient les assignations de variables pour une solution
    end if
end procedure
```

```
procedure SELECT_VALEUR_FC(a,i,{D'_j})
    while D'_i non vide do
        choisir et enlever a_j ∈ D'_i
        for all k, i < k ≤ n do
            for all b ∈ D'_k do
                if a ∪ {x_i : a_j} ∪ {x_k : b} n'est pas cohérent then
                    enlever b de D'_k
                end if
            end for
        end for
        if il existe un D'_k vide then
            remettre tous les domaines D'_k (k > i)
            à leur valeur d'avant le choix de a_j
        else
            retourner a_j
        end if
    end while
    retourner "rien"
end procedure
```

Exercices

- application n-reines (n=3, n=4)
- faire un pas sur la grille suivante, en instantiant la case (1,3), et en ne considérant que les contraintes liées aux cases du carré en haut à gauche.

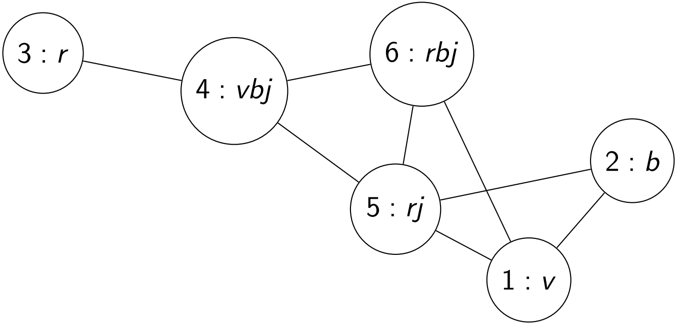
5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

- carré magique 3x3 : somme = 15,
  - départ : 4,3,8 // 9
  - départ : 4,3,8 // _ 5

Ordonnancement de variables

- backtrack fixe arbitrairement l'ordre d'instantiation
- beaucoup de situations où l'on peut faire mieux, en prenant tout de suite les décisions difficiles
  - les variables les plus contraintes (beaucoup de conflits)
  - les variables avec le moins de valeurs disponibles (cf cas des singletons)
- on peut aussi ordonner les valeurs considérées
  - par exemple, prendre les valeurs les moins problématiques (qui éliminent le moins de valeurs des variables reliées)
- pour limiter la malchance, on peut réordonner aléatoirement les variables restantes à chaque retour arrière

Exemple : coloration



variable à prendre d'abord : 5

(+petit domaine, +grd nb de voisins)

valeur à prendre d'abord : rouge

(élimine 1 valeur au lieu de 2 pour jaune)

procedure BACKTRACK_AVEC_ORDRE(CSP)

trier les variables par nombre de contraintes décroissantes où elles apparaissent,

puis par taille de domaine croissante en cas d'égalité

i = 1

a = {}

D'$_1$ = copie(D_1)

while $1 \leq i \leq n$ **do**

x = select_valeur(a,i,{D'$_j$}) ▷ **l'ordre des x_i est modifié**

...

end while

...

end procedure

```
procedure SELECT_VALEUR_SIMPLE(a,D'_i)
    while D'_i pas vide do
        choisir et enlever a_j ∈ D'_i
        if a ∪ {x_i : a_j} est cohérent then
            renvoyer a_j
        end if
    end while
    retourner "rien"
end procedure
```

```
procedure SELECT_VALEUR2(a,i,{D'_j})          ▷ ordre sur les variables
    k = min_{j/i<j}(|D'_j|)          ▷ variable restante de plus petit domaine
    échange x_{i+1} et x_k
    while D'_i pas vide do
        choisir et enlever a_j ∈ D'_i
        if a ∪ {x_i : a_j} est cohérent then
            renvoyer a_j
        end if
    end while
    retourner "rien"
end procedure
```

```
procedure SELECT_VALEUR3(a,i,{D'_j})          ▷ ordre sur les valeurs
                                              ▷ cas de la coloration
    while D'_i pas vide do
        v = min_{a_k ∈ D'_i}(∑_{j/i<j,(x_i,xj)∈CSP}(a_k ∈ D'_j))
            ▷ valeur la moins contraignante pour les variables liées à x_i
        enlever v de D'_i
        if a ∪ {x_i : v} est cohérent then
            renvoyer v
        end if
    end while
    retourner "rien"
end procedure
```

$$v = min_{a_k \in D'_i}\left(\sum_{j/i<j,(x_i,xj)\in CSP}(a_k \in D'_j)\right)$$

Exemples

- coloration
- carré magique : quel est le meilleur choix
  - de première case
  - et de première valeur ?

Exercice : Mariages stables

"Mariage stable" = problème d'appariement avec contraintes

- ex : appariement compagnies/candidats à un poste, ...
- 2 ensembles, et on doit trouver une bijection
- chacun a des préférences partielles (il peut y avoir des ex-aequo), et des vetos
- "stabilité" : que personne ne soit soumis à la tentation de divorcer pour trouver mieux ailleurs, avec quelqu'un qui préfère aussi la personne

- 1 préfère 8, puis (12 et 10 ex aequo) ;
- 2 préfère (8 et 11 ex aequo), puis 12 ;
- 3 préfère 7, puis 9, puis 12 ;
- 4 préfère 12, puis 9 ;
- 5 préfère 8, puis 7, puis 11 ;
- 6 préfère 12, puis (10 et 8 ex aequo), puis 11, puis 7.

Les classements des femmes :

- 7 préfère (5 et 3 ex aequo), puis 6 ;
- 8 préfère 2, puis, 5, puis 1, puis 6 ;
- 9 préfère (3 et 4 ex aequo) ;
- 10 préfère 6, puis 1 ;
- 11 préfère 5, puis 2, puis 6 ;
- 12 préfère 1, puis (4 et 6 ex aequo), puis 2, puis 3.

Questions

modélisation en contraintes :

- variables
- domaines
- contraintes
- ordonner les variables
  - par taille de domaine
  - par nombre de contraintes
- ordonner les valeurs ?
- résoudre par BT + ordonnancement de variables

Backjumping

- une autre source de travail inutile : revenir sur une variable alors que le problème se situe plus haut dans l'arbre de recherche
- amélioration : remonter, en cas de backtrack, à la dernière variable rencontrée qui est en conflit avec la variable courante
- "backjumping"
- "en conflit" = une contrainte impliquant les 2 variables est violée pour certaines valeurs de la variable courante