Programmation linéaire, TP2 : Modélisation sous Visual Xpress

1. Résolvez les programmes linéaires suivants sous Visual Xpress :
   (a) le premier exercice graphique du TD1
   (b) le problème Sable et Ciment du TD1
      i. version non générique
      ii. version générique

2. **Sac à dos** : Un alpiniste doit partir en randonnée en emportant un sac à dos ne pesant pas plus de 11 kg. Il doit décider quels aliments emporter et en quelle quantité de façon à pouvoir disposer du sac d'aliments le plus nutritif possible. Il a le choix entre des bananes, des céréales et du sucre, de valeur nutritives respectives 4, 5 et 6 calories et de poids unitaire 3g, 4g et 5g. Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire que vous résolverez à l'aide de Visual Xpress.

3. **Transport** : une entreprise possède 2 dépôts de marchandise D1 et D2. Elle doit répondre à la demande de 3 clients C1, C2 et C3. L'objectif de l'entreprise est de transporter les marchandises d'un des deux dépôts vers les clients en minimisant les coûts de transport. Le dépôt D1 contient 8 unités de marchandise et D2 en contient 9. Les clients C1, C2 et C3 font des demandes respectives de 4, 5 et 8 unités. Les coûts de transports sont donnés dans le tableau suivant :

	C1	C2	C3
D1	5	3	4
D2	6	7	2

   Modéliser et résoudre le programme linéaire correspondant à ce problème
   - de façon non générique, quelle contrainte peut-on supprimer?
   - de façon générique sans supprimer de contrainte.

4. **Stockage de pétrole** : on désire stocker dans une cuve un mélange de 4 pétroles bruts à teneurs diverses en azote et en soufre : (les quantités sont indiquées en pourcentage)

	P1	P2	P3	P4
soufre	0.3	4	3	1
azote	0.1	0.9	0.6	0.3

   L'utilisation prévue pour ce stock nécessite un mélange le plus riche possible en azote mais ne contenant pas plus de 1,5 tonne de soufre.

   D'autre part, on ne dispose que de 30 tonnes de P1, et de 35 tonnes de P4.

   Quelle quantité de chaque pétrole doit-on charger dans la cuve?

5. **Transport d'appareils photo** : La compagnie japonaise FOTOKA exporte par avion des appareils photo. Le chargement considéré ici ne peut peser plus de 330 kg et comporte quatre types de caisses. Dans les plus grosses, on peut ranger 180 appareils ; le poids total de la caisse est alors de 150kg. Dans les autres, on peut placer 140, 80 ou 40 appareils pour des poids respectifs de 120, 70 et 40 kg. On n'expédie que des caisses pleines.

   Donner le nombre de caisses de chaque type à expédier pour que le nombre total d'appareils photo livrés soit maximal.

6. **Chargement d'une péniche** : Sur le Rhin, un marinier possède une péniche d'un volume utile de 1500 m^3. Au cours des années, il s'est spécialisé dans le transport du blé. Il dispose de sept clients réguliers qui chargent et livrent pratiquement au même endroit. Le marinier connaît depuis longtemps ses coûts de transport et, suivant ses affinités, parvient à des accords avec ses clients pour le prix qui leur est facturé pour le transport du blé. Le tableau suivant regroupe les informations des sept clients. Chaque client dispose d'un certain nombre de lots à transporter et chacun définit lui-même la taille de ses lots en m^3. Pour chaque lot transporté, on retrouve le prix que facture le marinier à ses clients. La dernière colonne du tableau donne le coût par m^3 transporté par le marinier. Ce coût varie en fonction de la distance parcourue.

Client	Quantité disponible (en nb de lots)	Taille d'un lot (en m^3)	Prix facturé par lot transporté (en F)	Coût de transport (en F/m^3)
1	12	10	1000	80
2	31	8	600	70
3	20	6	600	85
4	25	8	700	80
5	50	15	1200	73
6	40	10	800	70
7	60	12	1100	80

   L'objectif du marinier est de maximiser le gain qu'il va pouvoir faire en transportant le blé de ses clients avec des lots que l'on pourra fragmenter dans un premier temps : quels sont les clients dont le blé sera transporté et en quelle quantité? Même question si les lots ne sont pas fragmentables.

7. **Le petit-déjeuner de la diva** : Le célèbre cuisinier Cétesky dut un jour préparer le petit déjeuner de la non moins célèbre cantatrice La Calastafiore. Celle-ci, dont l'appétit était aussi célèbre que le contre-ut, essayait de suivre un régime basses calories car elle était un peu, beaucoup, il faut bien le dire, très forte.

   Comme elle était également un peu, beaucoup, il faut bien l'avouer, très avare, le malheureux cuisinier qui tenait à s'assurer la clientèle d'une artiste de renom, devait résoudre un problème fort délicat.

Comment composer le menu comportant au plus 1000 calories, le moins cher possible, à partir des produits dont les caractéristiques suivent :

	poids unitaire	calories par gramme	prix unitaire en francs
toast	40g	3,4 c	1,50
miel (par toast)	15g	2,8 c	3,00
confiture (par toast)	10 g	5 c	2,00
thé (une tasse)	100 g	0,2 c	5,00
lait (un verre)	100 g	0,5 c	4,00
beurre (par toast)	10 g	8 c	2,50
œuf (sur le plat)	60 g	1 c	3,00
bacon (la tranche)	20 g	8 c	5,00
jus d'orange	30 g	4 c	6,00
sucre (morceau)	5 g	4 c	0,50

tout en satisfaisant les caprices de la diva.

La Calastafiore était capable par ses hurlements de colère de faire exploser tous les verres, glaces, vitres, se trouvant dans un rayon de quinze mètres.

Un toast devait donc toujours être tartiné de confiture, de beurre ou de miel ; un œuf sur le plat était impérativement accompagné de bacon et d'au moins un toast beurré ; il fallait sucrer son lait et son thé !

Un petit déjeuner idéal devait comporter au moins une boisson et un "aliment consistant" (autre que le sucre !).

Affolé, Cétesky se rendit dans la chambre du célèbre spécialiste de recherche opérationnelle Roseaux et lui exposa son problème.

Roseaux réfléchit quelques instants et laissa tomber : "Cher Monsieur, c'est un problème de programmation linéaire en variables entières ! Ce sera cinq cents francs pour la consultation !"

Modélisez ce problème en prenant soin de répertorier les 9 produits tolérés par La Calastafiore avec leur calories et leurs prix. De quoi se compose le petit déjeuner idéal (de quels aliments et en quelle quantité), quel est son coût et son nombre de calories?

8. **Localisation d'émetteurs de télévision** : Cinq sites ont été retenus pour construire des émetteurs de télévision destinés à desservir 15 localités. Sur chaque site, on construit un émetteur au plus et le tableau ci-dessous donne, pour chaque site, le coût de construction d'un émetteur et les localités qu'il dessert.

site	coût	localités desservies
s1	4	L1, L3, L5, L7, L8, L10, L12, L14
s2	7	L2, L4 , L11
s3	11	L1, L6, L8, L9, L10, L13, L14, L15
s4	6	L1, L2, L4, L8, L10, L11, L14
s5	10	L3, L5, L6, L7, L9, L12, L13, L15

On cherche à déterminer les sites sur lesquels il faut construire un émetteur de façon à pouvoir desservir toutes les localités au moindre coût.

Modélisez et résolvez ce problème

- de façon non générique
- de façon générique

9. **Voyageur de commerce** : Un voyageur de commerce doit passer une et une seule fois dans cinq villes. Les distances entre les villes sont données par le tableau :

	1	2	3	4	5
1	0	5	8	4	2
2	5	0	8	3	3
3	8	8	0	5	9
4	4	3	5	0	3
5	2	3	2	3	0

(a) Modélisez le problème, quel circuit doit-il effectuer?

(b) Si les distances sont les suivantes :

	1	2	3	4	5
1	0	3	12	2	5
2	9	0	4	5	4
3	6	5	0	12	3
4	9	7	7	0	2
5	1	1	3	3	0

Quel circuit obtient-on? Le problème est-il correctement modélisé? Que peut-on dire de l'optimum obtenu pour ce circuit par rapport à la longueur du circuit de longueur minimum?

10. **Chargement équilibré de wagons**

Trois wagons de chemin de fer de charge utile limitée à 100 quintaux sont réservés pour transporter seize caisses. Les caisses et leurs poids en quintaux sont donnés par le tableau suivant. Comment affecter les caisses aux wagons de façon à respecter les charges utiles maximales et à minimiser la charge du wagon le plus chargé?

caisse	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
poids	34	6	8	17	16	5	13	21	25	31	14	13	33	9	25	25

Modélisez ce problème en considérant que pour obtenir le minimum d'un maximum il faut minimiser une variable contenant ce maximum.

Comment sont chargés les wagons et quels sont leurs poids?

11. **Chaîne d'hôtels** : La chaîne d'hôtels CHICTON a décidé de construire quatre hôtels en quatre ans sur quatre terrains qu'elle possède déjà dans diverses régions.

La direction prévoit un coût de construction suivant la région et l'année de début des travaux défini par le tableau suivant :

coût de construction en millions de francs	année 1	année 2	année 3	année 4
Lyon (1)	150	125	175	150
Marseille (2)	145	150	200	250
Paris (3)	195	200	220	230
Le Havre (4)	140	150	155	160
Bordeaux (5)	125	140	180	150
Toulouse (6)	100	125	160	180

L'implantation de ces hôtels, s'ils sont construits, est soumise aux contraintes suivantes :

(a) Les hôtels de Paris et Lyon doivent être construits la même année ;

(b) Si l'hôtel de Marseille est construit la première année, celui de Bordeaux doit l'être aussi ;

(c) Les hôtels du Havre et de Bordeaux doivent être construits avant la troisième année ;

(d) Les hôtels de Toulouse et Marseille ne peuvent être construits la même année;

(e) Les frais engagés en construction la première année ne pourront dépasser 300 millions de francs.

La chaîne CHICTON cherche le programme de construction au moindre coût. Formaliser ce problème. Quand, où et à quel prix seront bâtis les 4 hôtels?

12. **Problème d'emploi du temps** : Un étudiant suit à l'université les cinq cours suivants : Algèbre, Analyse, Physique, Chimie minérale et Chimie organique. En raison du nombre élevé d'étudiants qui suivent ces cours, quatre groupes d'exercices dirigés ont été organisés dans chaque discipline. Les horaires de ces groupes sont donnés dans le tableau suivant :

	Algèbre	Analyse	Physique	Chimie min.	Chimie org.
groupe I	Lundi 13 à 15	Lundi 13 à 15	Mardi 8 à 11	Lundi 8 à 10	Lundi 9 à 10.30
groupe II	Mardi 10 à 12	Mardi 10 à 12	Mardi 10 à 13	Lundi 8 à 10	Lundi 10.30 à 12
groupe III	Mercredi 10 à 12	Mercredi 11 à 13	Jeudi 15 à 18	Jeudi 13 à 15	Vendredi 11 à 12.30
groupe IV	Mercredi 11 à 13	Jeudi 8 à 10	Jeudi 17 à 20	Vendredi 13 à 15	Vendredi 13 à 14.30

Dans chaque cours, cet étudiant a exprimé sa préférence pour les différents groupes en attribuant à chacun d'eux une note entre 0 et 10. Cette note tient compte de l'horaire et de la réputation de l'enseignant. Ces préférences sont exprimées dans le tableau ci-dessous :

	Algèbre	Analyse	Physique	Chimie min.	Chimie org.
groupe I	5	4	3	10	0
groupe II	4	4	5	10	5
groupe III	10	5	7	7	3
groupe IV	5	6	8	5	4

L'étudiant désire s'inscrire dans les cinq cours de façon à maximiser la somme de ses préférences. Il désire, en outre, respecter les trois contraintes suivantes :

- ne pas suivre plus de quatre heures de cours par jour ;
- disposer chaque jour d'une heure libre entre 12 et 14h (pour manger au RU) ;
- pouvoir pratiquer au moins une fois par semaine l'activité sportive à laquelle il s'est inscrit et qui a lieu le lundi de 13 à 15, le mercredi de 11 à 13 et le mercredi de 13 à 15.

(a) Modéliser ce problème. Donnez l'emploi du temps obtenu.

(b) Existe-t'il un emploi du temps dans lequel les cours sont groupés sur les trois jours, lundi, mardi et jeudi et où ils correspondent tous à une préférence supérieure ou égale à cinq?