Programmation linéaire

Rattrapage Contrôle continu du 24 Février 2003

Documents autorisés, durée 1h30

1. **Modélisation :** Une compagnie d'électronique doit produire 20 000 radios en 4 semaines. Le client accepte de payer \$20 pour chaque radio livrée à la fin de la première semaine, \$18 pour celles livrées à la fin de la deuxième semaine, \$16 pour la fin de la troisième semaine, \$14 pour la fin de la quatrième semaine.

   Chaque employé ne pouvant assembler que 50 radios par semaine, la compagnie ne peut pas fournir à la demande car elle ne dispose que de 40 employés. Elle doit donc embaucher et former des travailleurs temporaires. Chaque employé peut soit être employé à l'assemblage des radios soit instruire une classe de 3 apprentis ; après une semaine d'instruction, chaque apprenti est considéré comme un employé à part entière : il peut soit assembler des radios soit instruire d'autres apprentis.

   La compagnie n'a pas d'autre contrats pour le moment ; ainsi des employés peuvent devenir oisifs quand les 20 000 radios auront été produites. Chaque employé permanent ou temporaire doit être gardé jusqu'à la fin des 4 semaines. Les salaires hebdomadaires des employés (assembleurs, instructeurs ou oisifs) sont de \$200 ; les salaires hebdomadaires des apprentis sont de \$100. Le coût de production, en excluant les salaires des employés, est de \$5 par radio.

   La compagnie peut par exemple adopter le programme suivant :

   - Première semaine
     10 assembleurs, 30 instructeurs, 90 apprentis
     salaires des employés : \$8000
     salaires des apprentis : \$9000
     profit pour les 500 radios produites : \$7500
     perte nette : \$9500
   - Deuxième semaine 120 assembleurs, 10 instructeurs, 30 apprentis
     salaires des employés : \$26 000
     salaires des apprentis : \$3000
     profit pour les 6000 radios produites : \$78 000
     profit net : \$49 000
   - Troisième semaine 160 assembleurs
     salaires des employés : \$32 000
     profit pour les 8000 radios produites : \$88 000
     profit net : \$56 000
   - Quatrième semaine 110 assembleurs, 50 oisifs
     salaires des employés : \$32 000
     profit pour les 5500 radios produites : \$49 500
     profit net : \$17 500

   Ce programme amène à un profit net de \$113 000, c'est un des programme possibles. La compagnie veut maximiser son profit net. Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire en précisant ce que représentent les variables et ce que signifie chaque contrainte.

2. **Utilisation du simplexe tableau :** Utilisez le simplexe sous forme tableau pour résoudre le programme linéaire suivant :
$$\begin{cases} \quad Max \quad z = 3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 - x_2 \leq -3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. **Dual :** Étant donné le programme linéaire suivant :
$$\begin{cases} \quad Max \quad z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\ x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 \geq 0 \end{cases}$$
Quel est son dual?
Sachant que ce programme linéaire a pour solution optimale : $x_1 = 0$, $x_2 = 14$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$ en déduire la solution du dual.

4. **Graphique :** Soit les contraintes suivantes :
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \; , \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$
Déterminez la région des points admissibles. Choisissez un point de cette région et trouvez une fonction objectif ayant ce point comme seule solution optimale.