Programmation linéaire

Contrôle continu du 24 Février 2003

Documents autorisés, durée 1h30

1. **Modélisation :** Modélisez le problème suivant par un programme linéaire sous forme canonique en précisant ce que représentent les variables et ce que signifie chaque contrainte.

   Trois espèces de crabes sont pêchées dans les eaux côtières de l'Alaska ; le crabe royal, le crabe des neiges et le crabe "Dungeness", en des lieux différents mais proches.

   Des bateaux sont aménagés pour pouvoir pêcher indifféremment les trois sortes de crabes ; pour un mois donné, dans la zone de "Cook Inlet", la capacité totale de pêche des bateaux est de 1000 tonnes de crabes.

   À l'arrivée des bateaux au port, un tri doit être effectué sur la cargaison : ce tri tient compte, suivant la période de bataille, de la taille des carapaces des crabes, de leur qualité, etc. Aussi, après ce tri, ne peut-on utiliser en moyenne que 80% de la quantité totale de crabe royal pêchée, 95% de celle de crabe des neiges et 90% de celle du crabe Dungeness. Les crabes éliminés sont perdus.

   Intervient alors le conditionnement : différents points sont situés sur la côte, celui attribué à la zone "Cook Inlet" pouvant conditionner au maximum 900 tonnes de crabe au total pour le mois considéré.

   Le crabe royal est le plus demandé, mais afin de respecter un certain équilibre entre les espèces, il a été établi que la différence entre la quantité pêchée de crabe royal et le tonnage global des deux autres espèces doit être inférieure à 100 tonnes.

   On désire établir le plan de pêche qui maximise le bénéfice sachant que l'on gagne 12.5 unités monétaires par tonne de crabe royal **pêchée et conditionnée**, 8.42 u.m. par tonne pour la seconde espèce et 7.78 u.m. par tonne pour la troisième.

   Les pêcheurs connaissent les sites où ils peuvent attraper telle ou telle sorte de crabe (qui ne se mélangent pas : en un lieu donné on ne rencontre pas simultanément des espèces différentes).

2. **Utilisation du simplexe tableau :** Utilisez le simplexe sous forme tableau pour résoudre le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & Max & & z & = & 14x_1 + 5x_2 + x_3 \\ x_1 & + & x_2 & & & \geq & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & \geq & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & \leq & 6 \\ x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

3. **Dual et résolution graphique :** Résoudre le programme linéaire suivant en résolvant le dual de façon graphique puis en en déduisant la solution du programme initial.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & Max & & z & = & 10x_1 - 8x_2 - 63x_3 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & \leq & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & - & 9x_3 & \leq & 6 \\ x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$