

Box-Splines et Surfaces de Subdivision

Loïc Barthe

Equipe SIRV - IRIT / UPS / CNRS
Toulouse

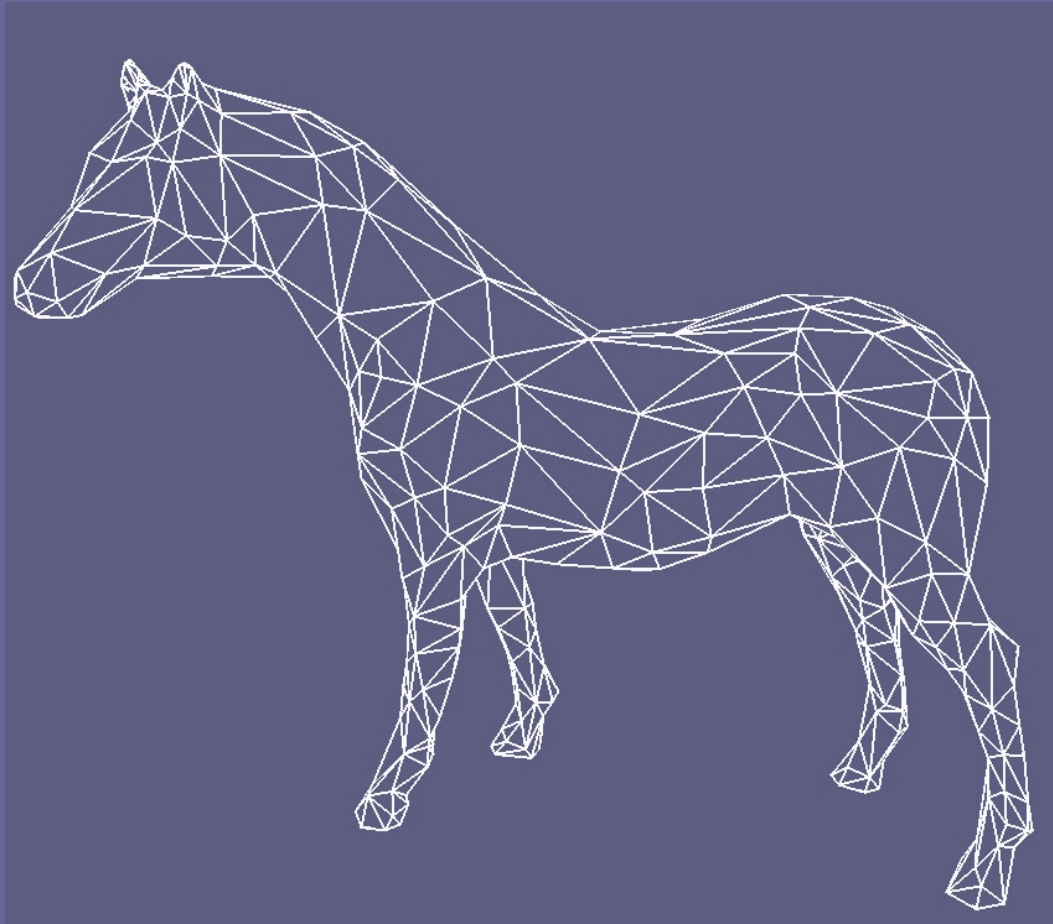
Plan de la présentation

- Pourquoi la subdivision et pourquoi sur les Box-splines
- La subdivision : principe général
- D'une courbe Box-spline à un schéma de subdivision
- Passage aux surfaces
- Les sommets irréguliers
- Limites
- Conclusion
- Livres et cours / Bibliographie

Pourquoi la subdivision et pourquoi sur les Box-splines

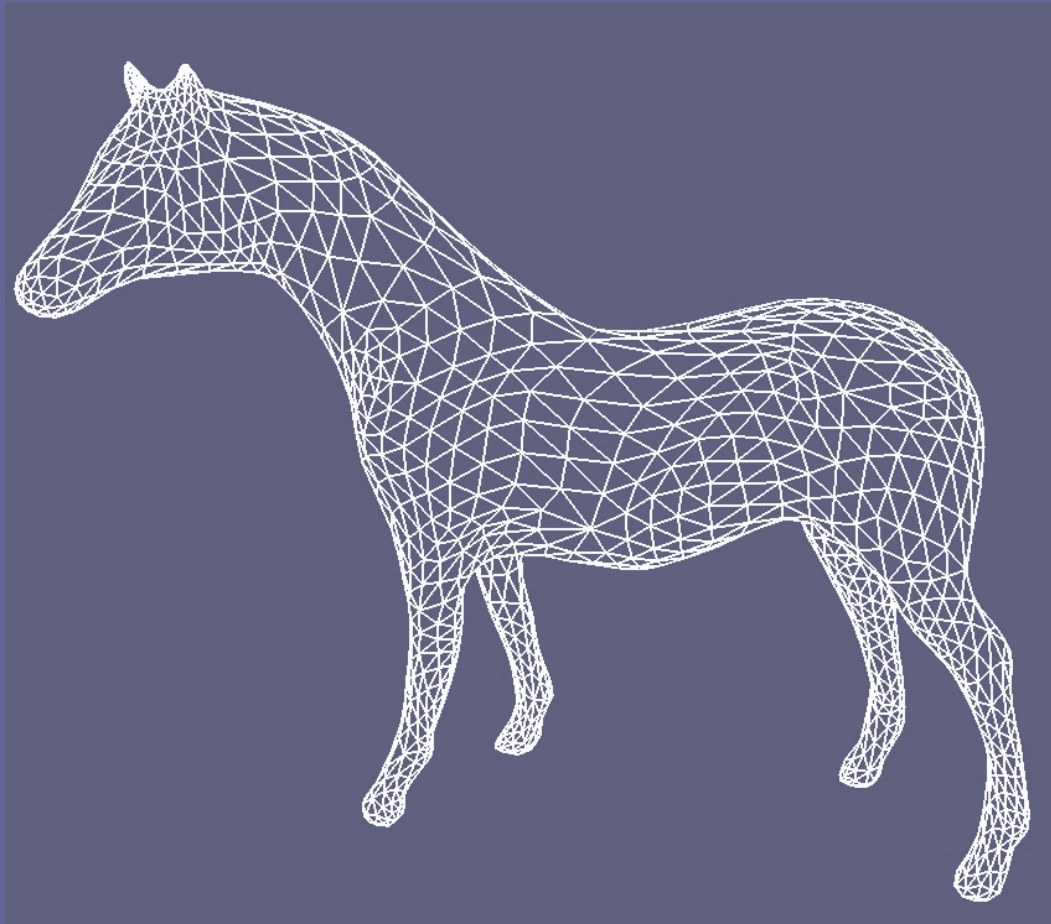
La subdivision ?

- A partir d'un maillage 2D manifold à topologie quelconque :



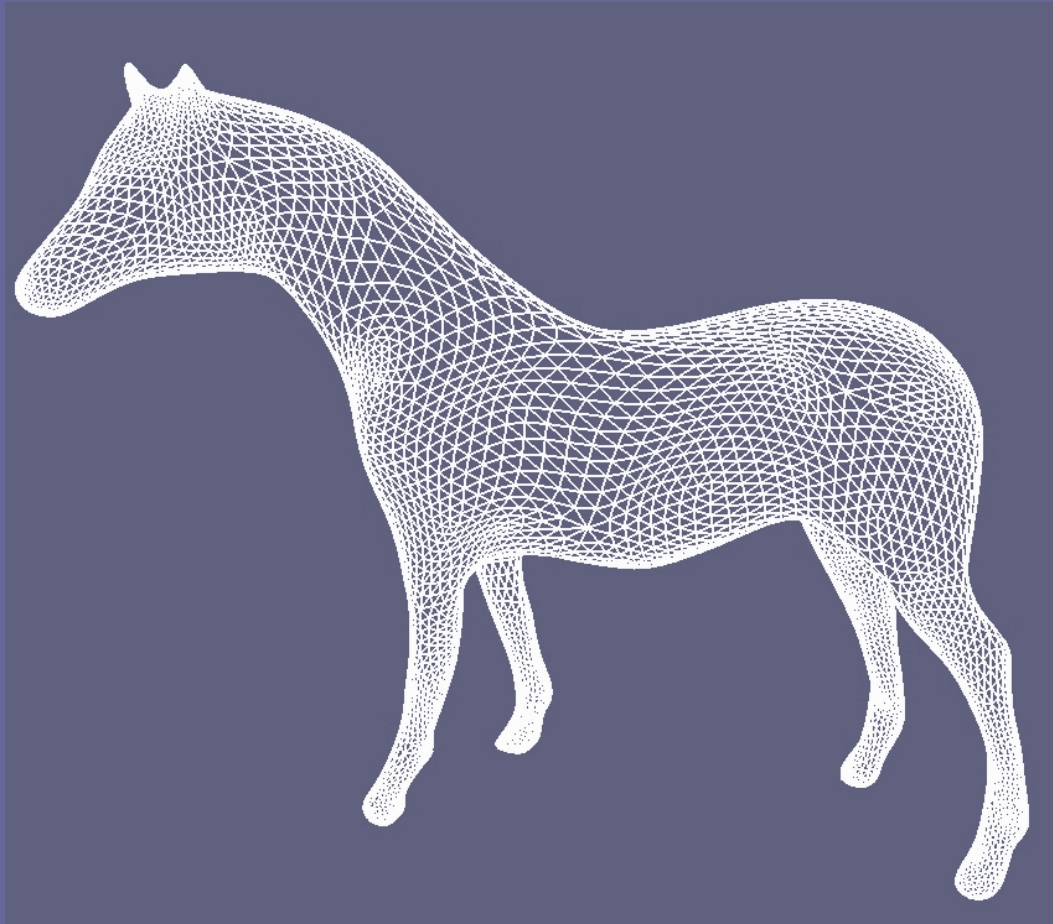
La subdivision ?

- Chaque triangle est découpé en plus petits triangles pour fournir un maillage plus dense



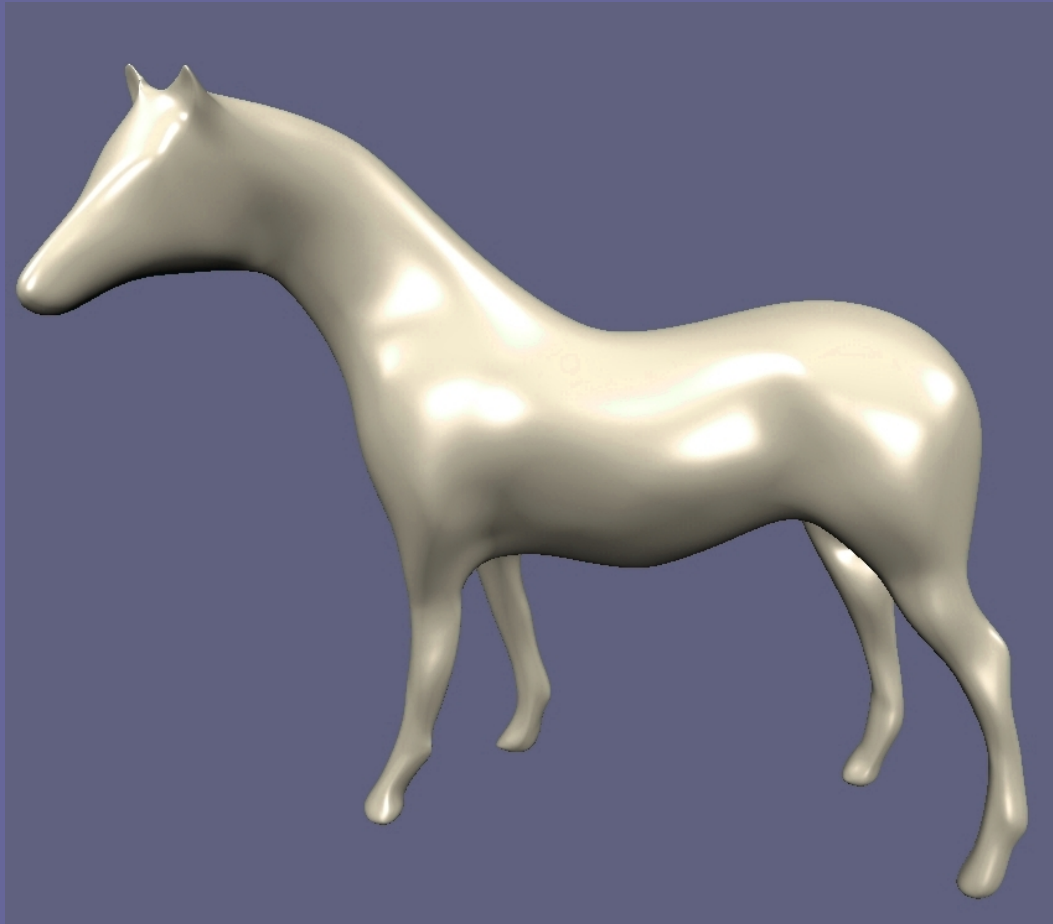
La subdivision ?

- Cette opération est répétée autant que souhaité



La subdivision ?

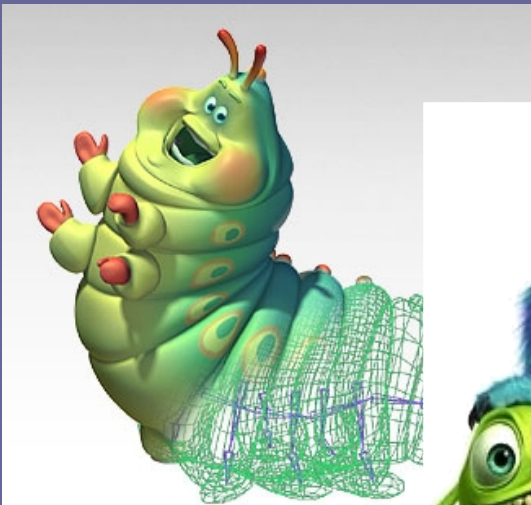
- Et le maillage converge vers une surface lisse



L'animation

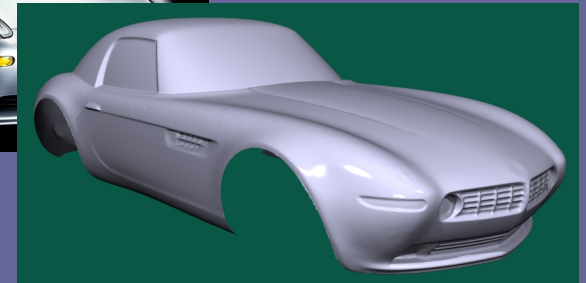
- Modélisation intuitive et interactive de surfaces 3D
 - Un artiste n'est pas un informaticien, ni un mathématicien!!!!
- On recherche une qualité visuelle
 - Continuité de normales : surfaces C^1

Continuité de courbure : surfaces C^2



Construction

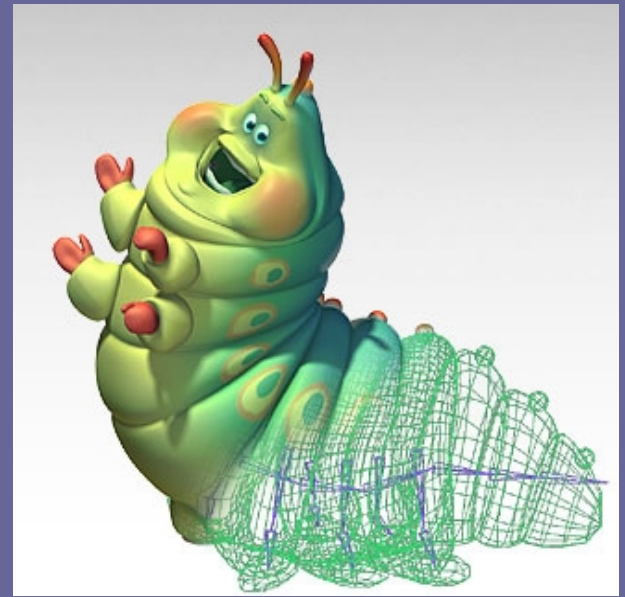
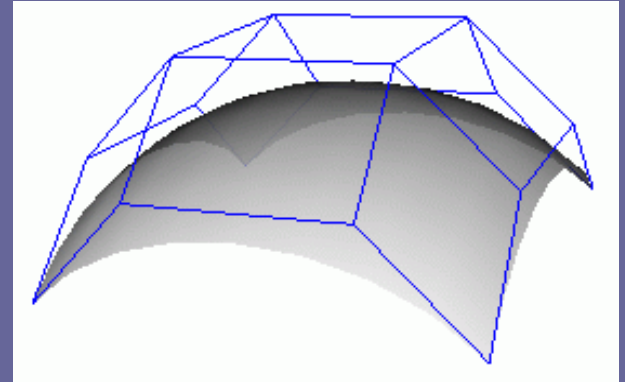
- Modélisation de maquettes
- Logiciels de constructions : de la conception à la fabrication (toujours l'interactivité)
 - Une représentation mathématique de la surface qui doit être précise et adaptée aux contraintes de fabrication
(continuité, découpage, assemblage, discrétisation, ...)
 - Doit aussi supporter les modèles d'études physiques (aérodynamique, résistance des matériaux, ...)



Les surfaces paramétriques

- Les carreaux de Bézier (1954), B-spline (1962), ...
 - Standard pour l'animation et la construction

$$p(u, v) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} N_i^k(u) N_j^l(v) P_{i,j}$$

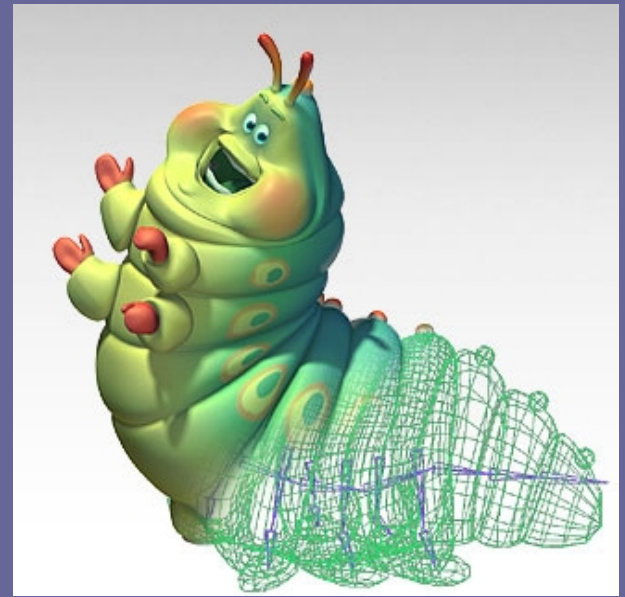
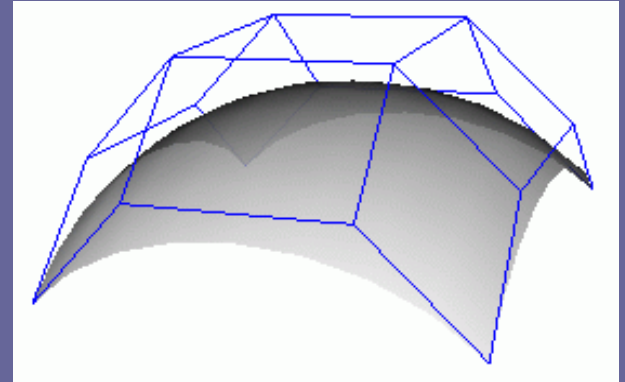


Les surfaces paramétriques

- Les carreaux de Bézier (1954), B-spline (1962), ...
 - Standard pour l'animation et la construction

$$p(u, v) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} N_i^k(u) N_j^l(v) P_{i,j}$$

- ✓ Chaque carreau est défini par un polygone de contrôle
- ✓ Modélisation type couture

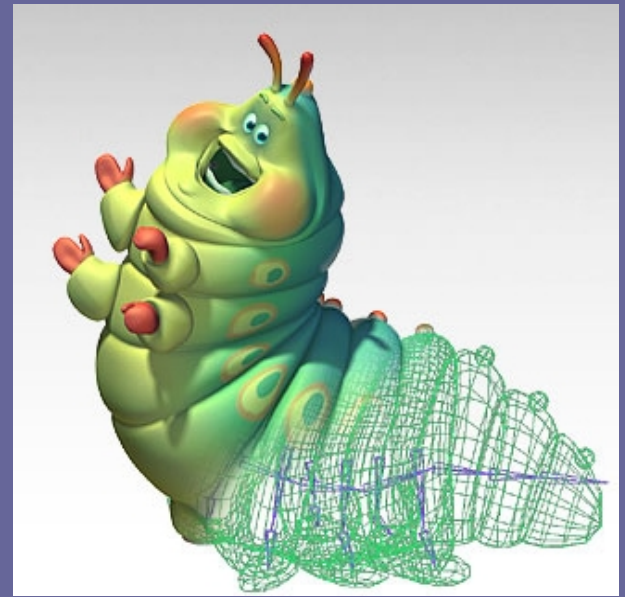
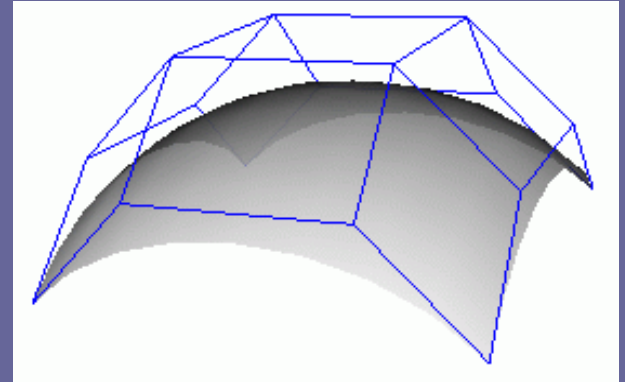


Les surfaces paramétriques

- Les carreaux de Bézier (1954), B-spline (1962), ...
 - Standard pour l'animation et la construction

$$p(u, v) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} N_i^k(u) N_j^l(v) P_{i,j}$$

- ✓ Chaque carreau est défini par un polygone de contrôle
- ✓ Modélisation type couture
- ✗ Difficulté de contrôle des connections inter-carreaux
- ✗ Difficulté pour ajuster la surface à un polygone de contrôle quelconque



Les surfaces de subdivision

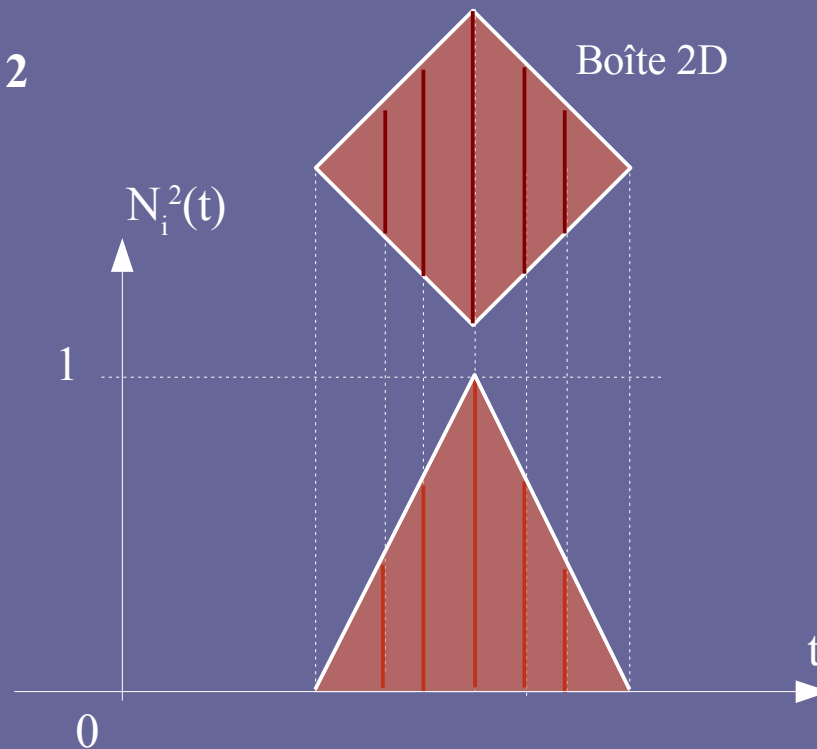
- Un maillage est raffiné itérativement et converge éventuellement vers une surface Box-spline (1978) :
 - Généralisation des Box-splines à un polygone de contrôle quelconque
- Geri's Game (Pixar 1997)
 - Les surfaces de subdivision deviennent un standard dans l'industrie de l'animation



Les Box-splines

- Ce sont des splines dont les fonctions de base sont polynomiales par morceaux.
- Les fonctions de base d'ordre k sont obtenues à partir de sections de boîtes de dimension k

Ordre $k = 2$

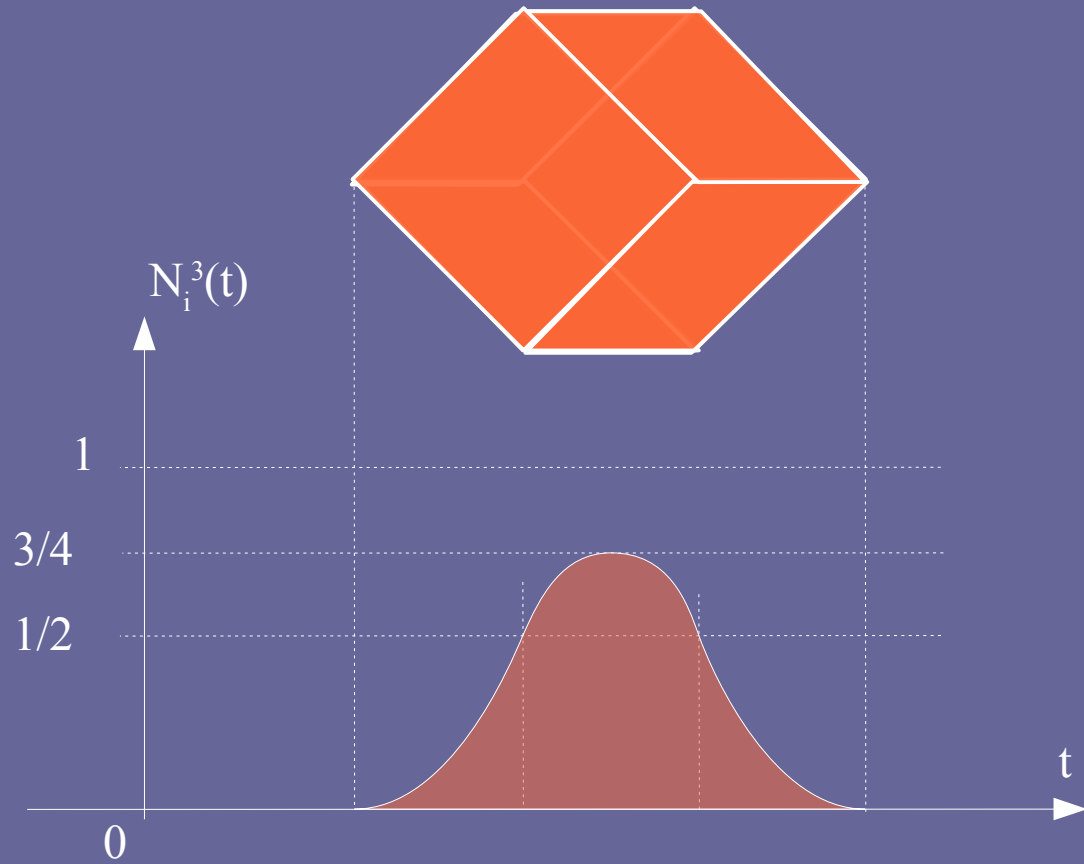
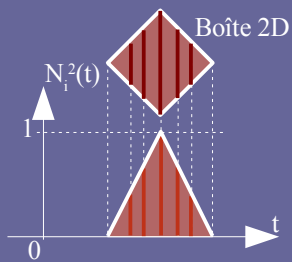


[dBH94]

Les Box-splines

Boîte de dimension 3 : ordre $k = 3$

Ordre $k = 2$



Les Box-splines

- Sur les courbes, les Box-splines sont identiques aux B-splines uniformes
- Le produit tensoriel de 2 Box-splines est identique au produit tensoriel de 2 B-splines uniformes
- Les Box-splines ont des fonctions de base contrôlées par un maillage triangulaire régulier.
- Les Box-splines peuvent être définies à partir de directions (voir un peu plus loin dans la présentation)

Pourquoi subdiviser à partir des Box-splines ?

- Proposer des schémas de subdivision sur les courbes, les maillages de quadrilatères et les maillages triangulaires

Pourquoi subdiviser à partir des Box-splines ?

- Proposer des schémas de subdivision sur les courbes, les maillages de quadrilatères et les maillages triangulaires
- Dans les zones où le maillage est régulier, la surface limite est une Box-spline et ainsi :
 - On connaît l'équation et la continuité de la surface limite
 - La surface limite possède toutes les bonnes propriétés des Box-spline : enveloppe convexe, faibles oscillations, ...

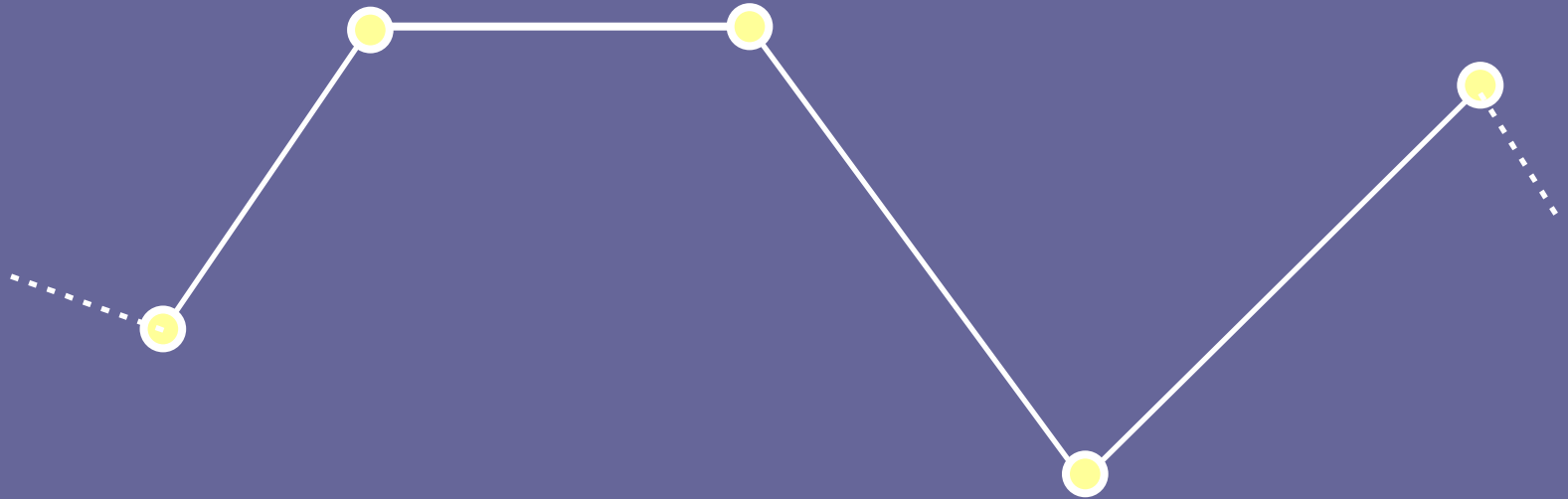
Pourquoi subdiviser à partir des Box-splines ?

- Proposer des schémas de subdivision sur les courbes, les maillages de quadrilatères et les maillages triangulaires
- Dans les zones où le maillage est régulier, la surface limite est une Box-spline et ainsi :
 - On connaît l'équation et la continuité de la surface limite
 - La surface limite possède toutes les bonnes propriétés des Box-spline : enveloppe convexe, faibles oscillations, ...
- ✓ **Toutes les propriétés des Box-splines applicables à un polygone de contrôle quelconque !**
- ✗ Un bémol néanmoins sur les zones d'irrégularité (voir plus loin dans la présentation)

La subdivision : principe général

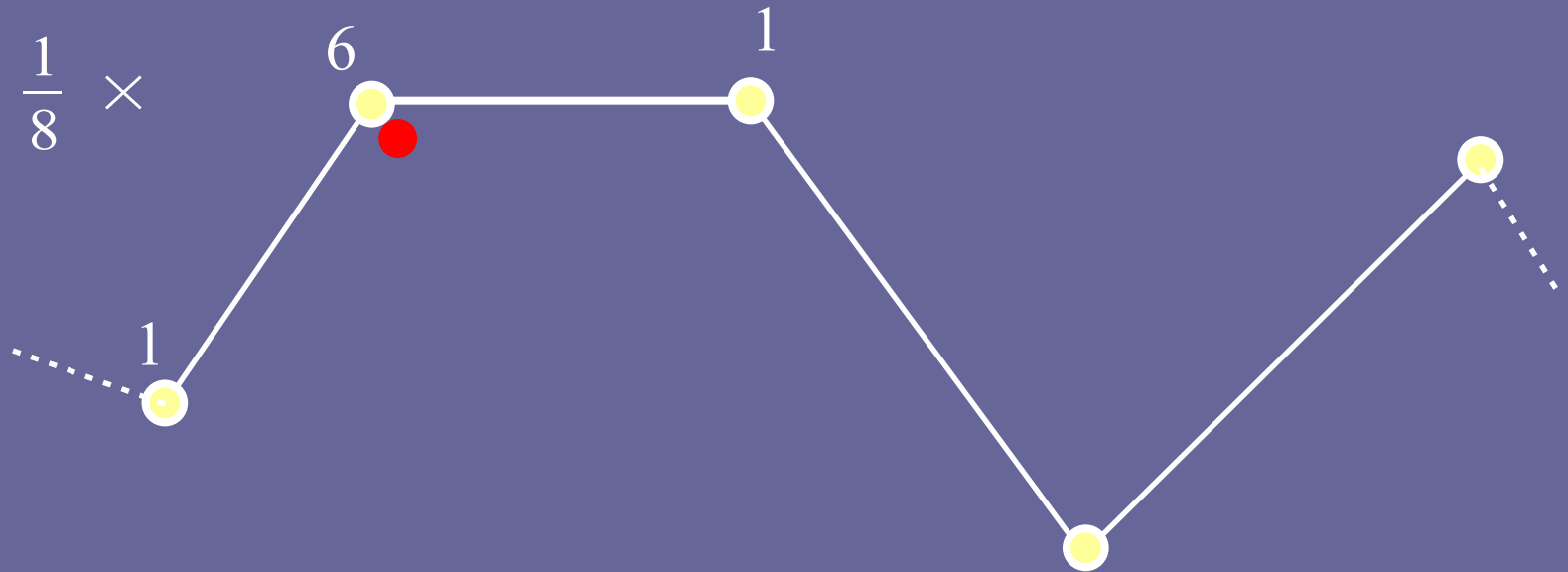
Principe général

- Illustration sur une courbe



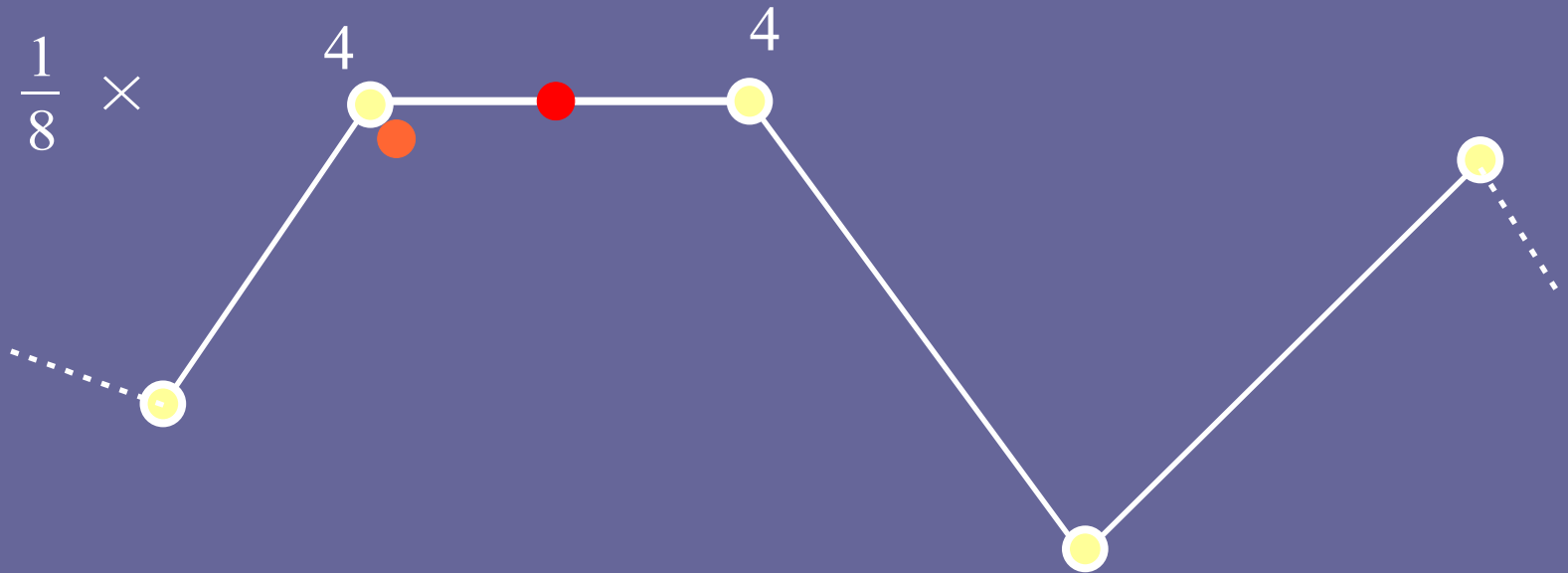
Principe général

- Un sommet est déplacé par combinaison affine des anciens sommets



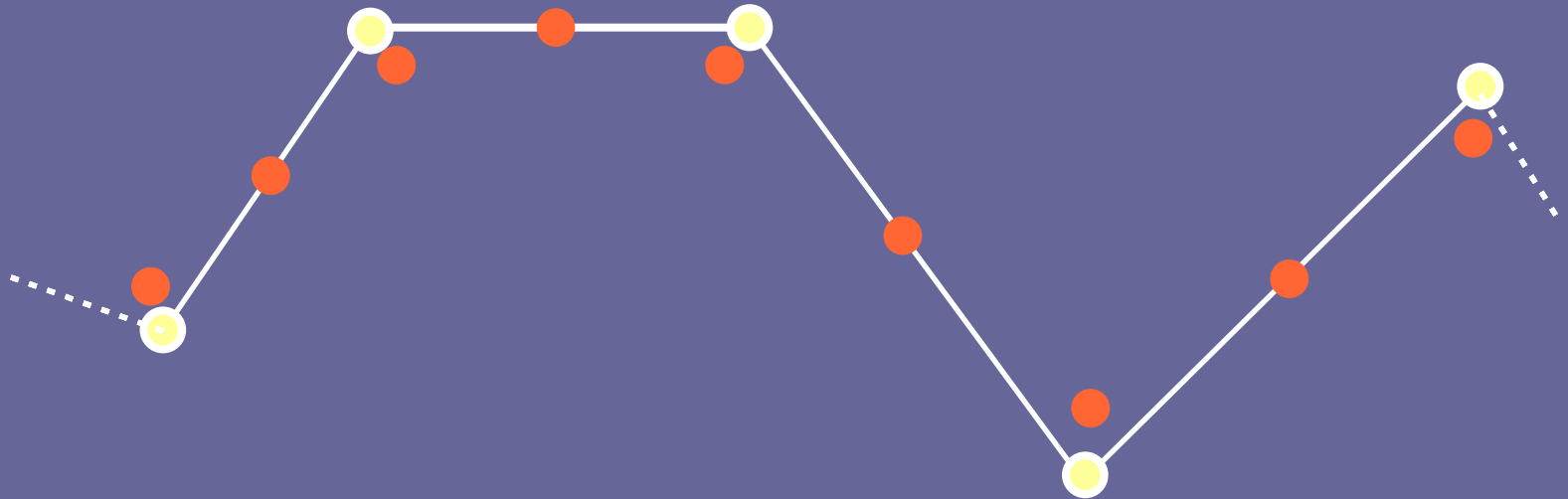
Principe général

- Un nouveau point est inséré pour un segment, par combinaison affine des anciens points



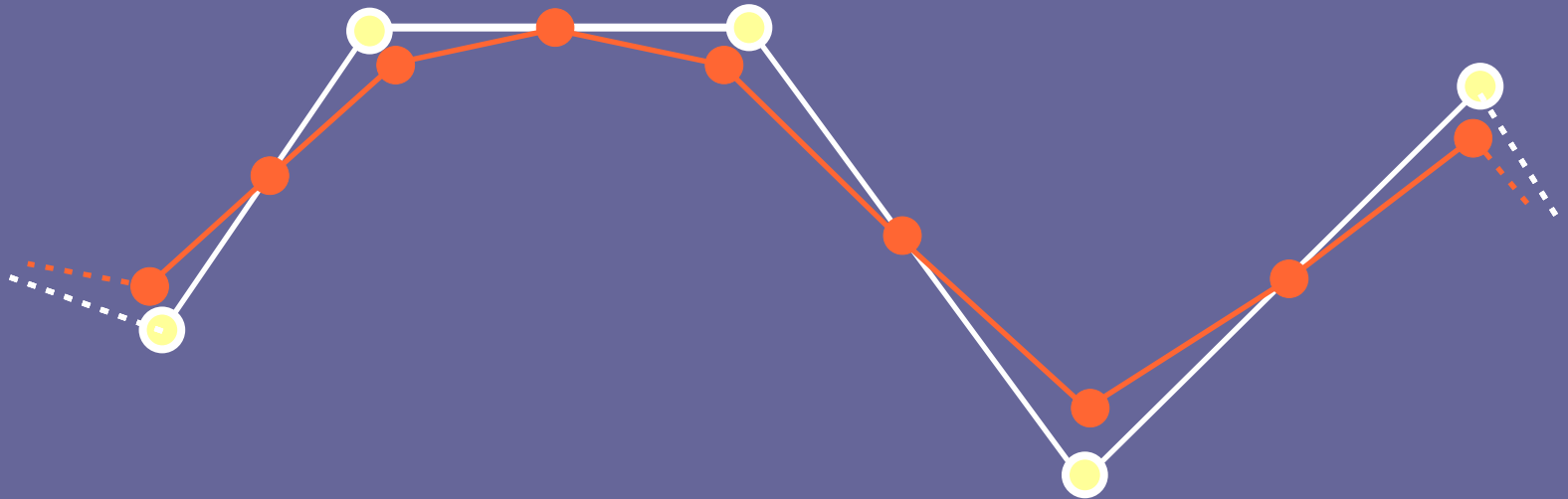
Principe général

- Ces combinaisons affines sont répétées pour chaque sommet et chaque segment



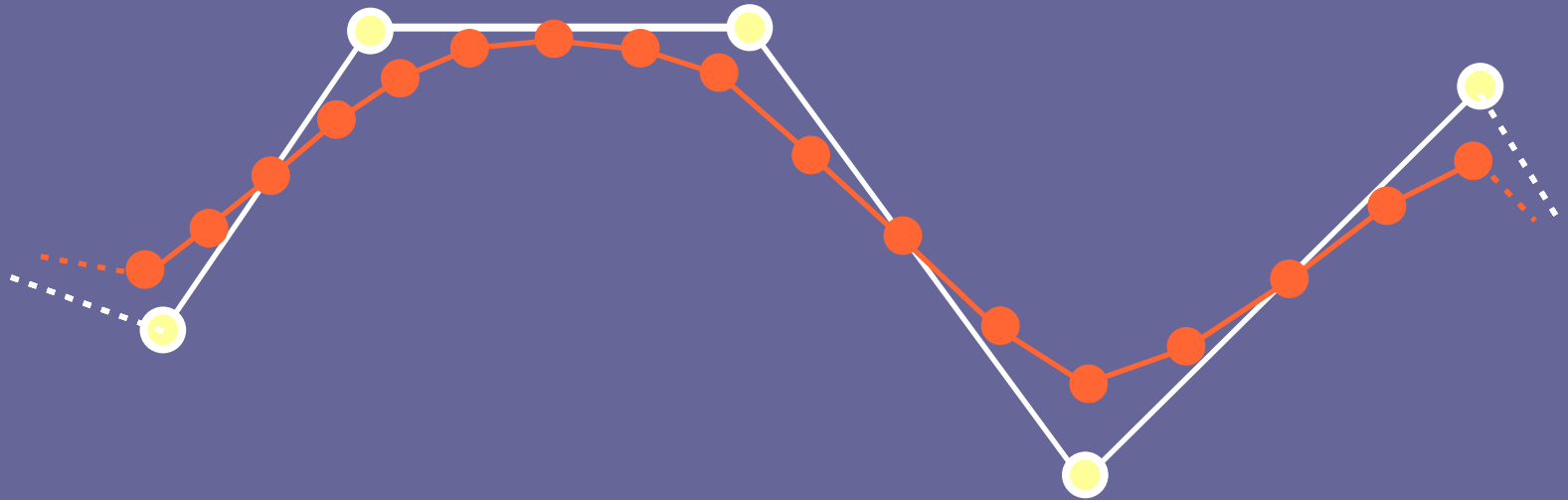
Principe général

- Les nouveaux points sont ensuite maillés



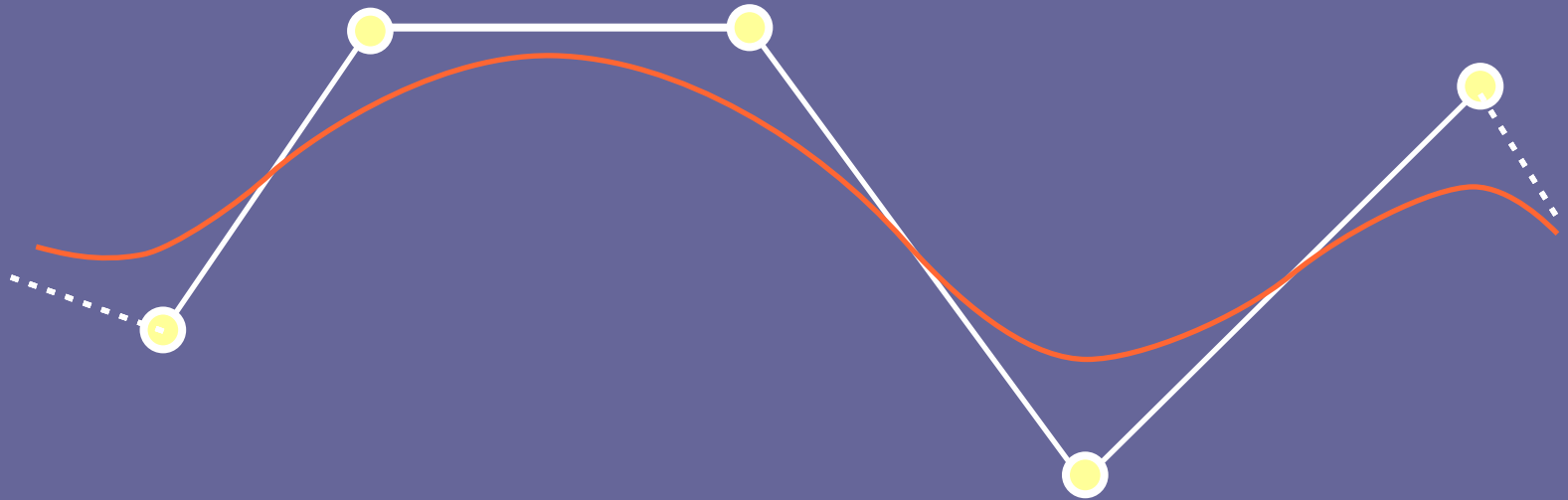
Principe général

- Puis on répète un pas de subdivision



Principe général

- Et à la limite, le maillage converge vers une courbe



Règles de subdivision

- Les combinaisons affines calculant les nouveaux points sont les **règles de subdivision**.
 - Dans cet exemple, il y en a deux :

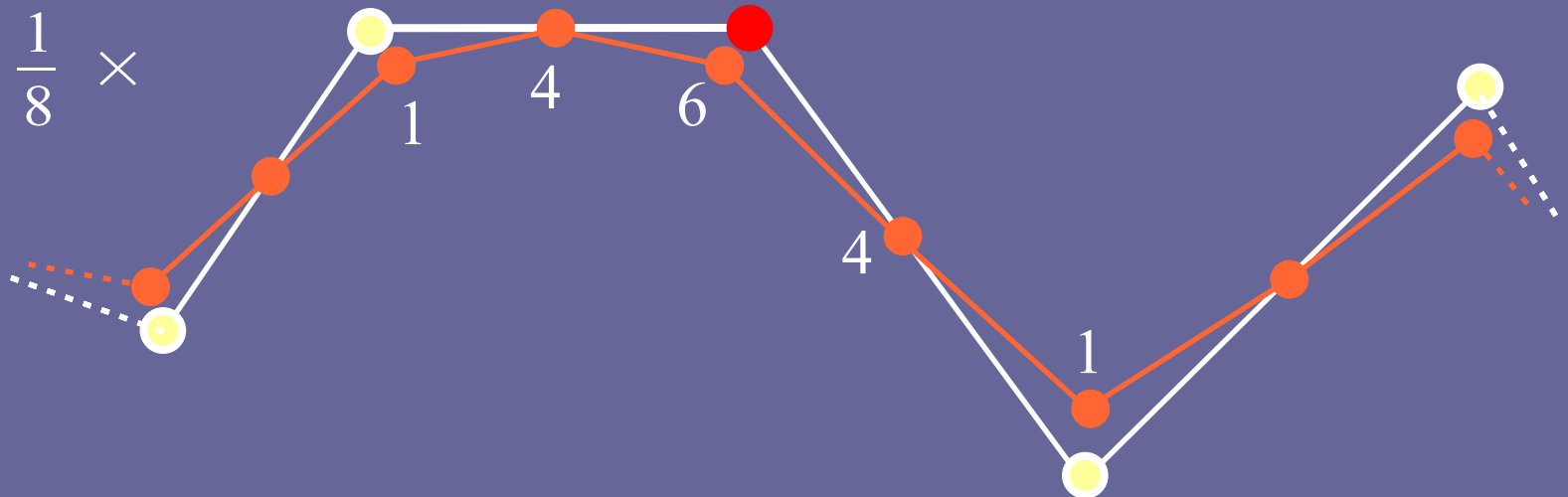
$$\frac{1}{8} [1 \ 6 \ 1]$$

$$\frac{1}{8} [4 \ 4]$$

Masque

- Le masque donne l'influence d'un ancien point sur les nouveaux :

$$\frac{1}{8} [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]$$



Passage du masque aux règles de subdivision

- Après subdivision, on a multiplié par deux le nombre de sommet :

schéma diadic

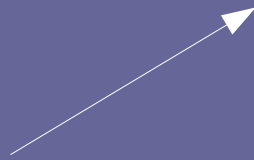
- Pour passer du masque aux règles de subdivision, on parcourt le masque en prenant une valeur sur deux :

$$\frac{1}{8} [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]$$

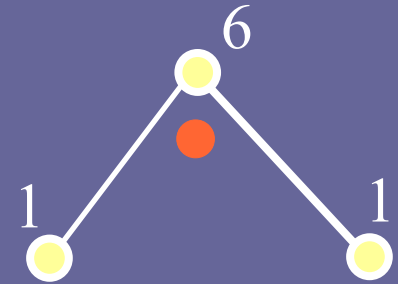
Passage du masque aux règles de subdivision

- Après subdivision, on a multiplié par deux le nombre de sommet : **schéma diadic**
- Pour passer du masque aux règles de subdivision, on parcourt le masque en prenant une valeur sur deux :

$$\frac{1}{8} [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]$$



$$\frac{1}{8} [1 \ 6 \ 1]$$

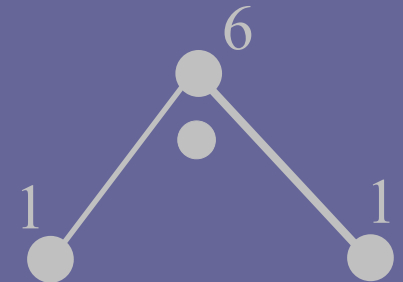


Passage du masque aux règles de subdivision

- Après subdivision, on a multiplié par deux le nombre de sommet : **schéma diadic**
- Pour passer du masque aux règles de subdivision, on parcourt le masque en prenant une valeur sur deux :

$$\frac{1}{8} [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]$$

$$\frac{1}{8} [1 \ 6 \ 1]$$



$$\frac{1}{8} [4 \ 4]$$

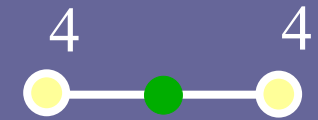


Schéma de subdivision

Si on connaît le masque, on en déduit les règles de subdivision
et le positionnement des nouveaux sommets

**D'une courbe Box-spline
à
un schéma de subdivision**

Fonctions de base des Box-splines univariées

- Fonctions de base d'ordre 1 :

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Fonctions de base d'ordre 2 :

$$N_i^2(u) = N_i^1(u) * N_i^1(u)$$

- Fonctions de base d'ordre k :

$$N_i^k(u) = N_i^1(u) * N_i^{k-1}(u)$$

Masque diadic de la Box-spline d'ordre 1

- Fonctions de base d'ordre 1 :

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Masque du schéma diadic d'ordre 1 :

$$M^1 = [1 \quad 1]$$

- Fonctions de base d'ordre 2 :

$$N_i^2(u) = N_i^1(u) * N_i^1(u)$$

- Fonctions de base d'ordre k :

$$N_i^k(u) = N_i^1(u) * N_i^{k-1}(u)$$

Masque diadic de la Box-spline d'ordre 2

- Fonctions de base d'ordre 1 :

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Masque du schéma diadic d'ordre 1 :

$$M^1 = [1 \quad 1]$$

- Fonctions de base d'ordre 2 :

$$N_i^2(u) = N_i^1(u) * N_i^1(u)$$

Masque du schéma diadic d'ordre 2 :

$$M^2 = M^1 * M^1 = [1 \quad 1] * [1 \quad 1]$$

- Fonctions de base d'ordre k :

$$N_i^k(u) = N_i^1(u) * N_i^{k-1}(u)$$

Masque diadic de la Box-spline d'ordre k

- Fonctions de base d'ordre 1 :

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Masque du schéma diadic d'ordre 1 :

$$M^1 = [1 \quad 1]$$

- Fonctions de base d'ordre 2 :

$$N_i^2(u) = N_i^1(u) * N_i^1(u)$$

Masque du schéma diadic d'ordre 2 :

$$M^2 = M^1 * M^1 = [1 \quad 1] * [1 \quad 1]$$

- Fonctions de base d'ordre k :

$$N_i^k(u) = N_i^1(u) * N_i^{k-1}(u)$$

Masque du schéma diadic d'ordre k :

$$M^k = M^1 * M^{k-1} = [1 \quad 1] * M^{k-1}$$

En termes de directions

- On définit des directions à partir des transformées en z d'un signal discret $[a_0 a_1 \dots a_n]$
 - Polynôme de Laurent :

$$p(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i z^i$$

En termes de directions

- On définit les directions à partir des transformées en z d'un signal discret $[a_0 a_1 \dots a_n]$

- Polynôme de Laurent :

$$p(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i z^i$$

- Ainsi $[1 \ 1]$ s'écrit $p(z) = 1 + z$

En termes de directions

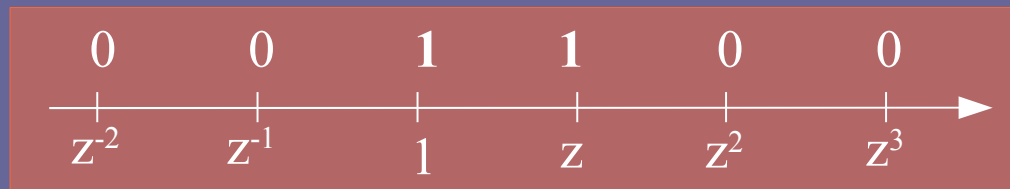
- On définit les directions à partir des transformées en z d'un signal discret $[a_0 a_1 \dots a_n]$

– Polynôme de Laurent :

$$p(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i z^i$$

- Ainsi $[1 \ 1]$ s'écrit $p(z) = 1 + z$

- Ce qui se représente par :



En termes de directions

- On définit les directions à partir des transformées en z d'un signal discret $[a_0 a_1 \dots a_n]$

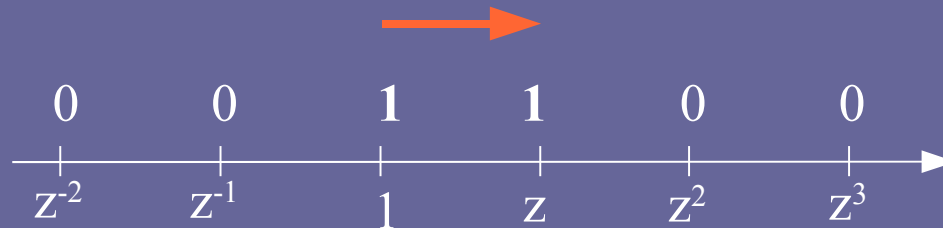
– Polynôme de Laurent :

$$p(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i z^i$$

- Ainsi $[1 \ 1]$ s'écrit $p(z) = 1 + z$

- Ce qui se représente par :

- **Soit une direction :**



En termes de directions

- Ainsi le masque du schéma diadic correspondant à la Box-spline univariée à 2 directions (ordre 2) est :



soit

$$[1 \ 1] * [1 \ 1]$$

En termes de directions

- Ainsi le masque du schéma diadic correspondant à la Box-spline univariée à 2 directions (ordre 2) est :



soit

$$[1 \ 1] * [1 \ 1]$$



$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array}$$

En termes de directions

- Ainsi le masque du schéma diadic correspondant à la Box-spline univariée à 2 directions (ordre 2) est :



soit

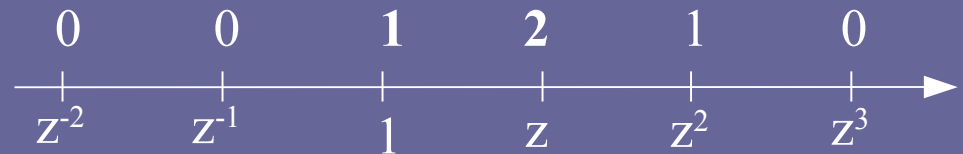
$$[1 \ 1] * [1 \ 1]$$



$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array}$$

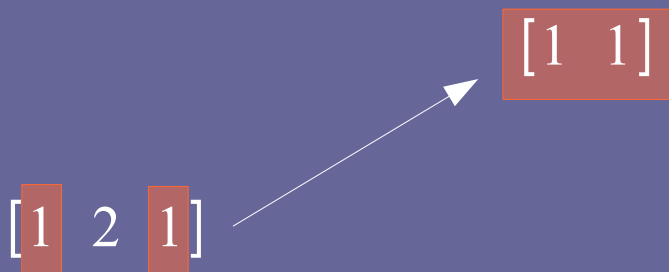
ou

$$(1 + z)(1 + z) = (1 + 2z + z^2)$$



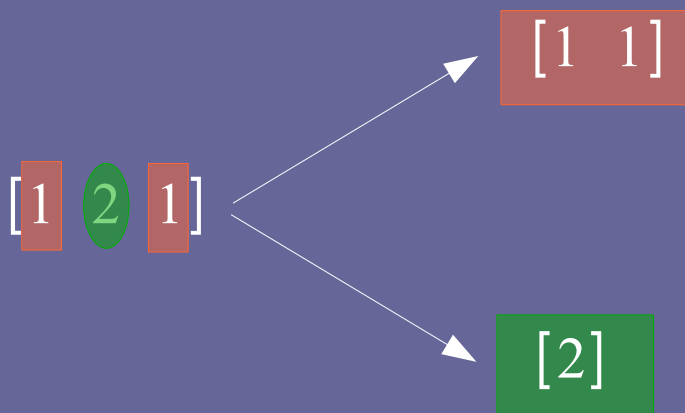
En terme de directions

- Du masque, on déduit les règles de subdivision :



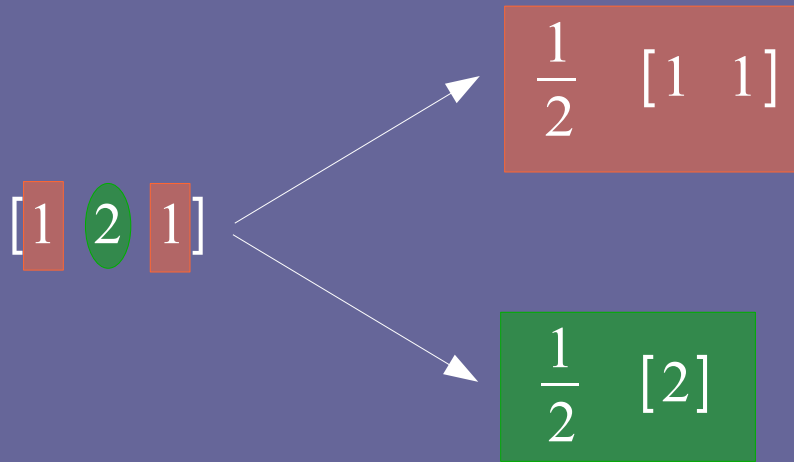
En terme de directions

- Du masque, on déduit les règles de subdivision :



En terme de directions

- Puis on normalise les règles :



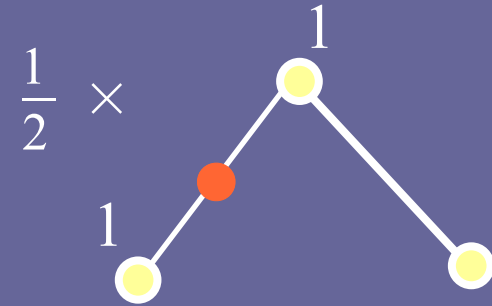
En terme de directions

- Et on les applique sur les sommets :

$$[1 \ 2 \ 1]$$

$$\frac{1}{2} [1 \ 1]$$

$$\frac{1}{2} [2]$$



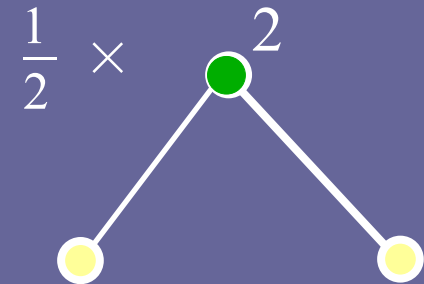
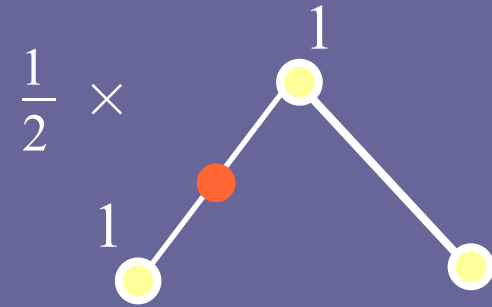
En terme de directions

- Et on les applique sur les sommets :

[1 2 1]

$\frac{1}{2}$ [1 1]

$\frac{1}{2}$ [2]



Et c'est tout !!

Masque de la Box-spline univariée à 3 directions

- C'est la Box-spline d'ordre 3 (degré 2)

$$\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \equiv [1 \ 1] * [1 \ 1] * [1 \ 1] = [1 \ 2 \ 1] * [1 \ 1]$$

Masque de la Box-spline univariée à 3 directions

- C'est la Box-spline d'ordre 3 (degré 2)

$$\begin{array}{cccc} \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \quad \equiv \quad [1 \ 1] * [1 \ 1] * [1 \ 1] = [1 \ 2 \ 1] * [1 \ 1]$$

Masque de la Box-spline univariée à 3 directions

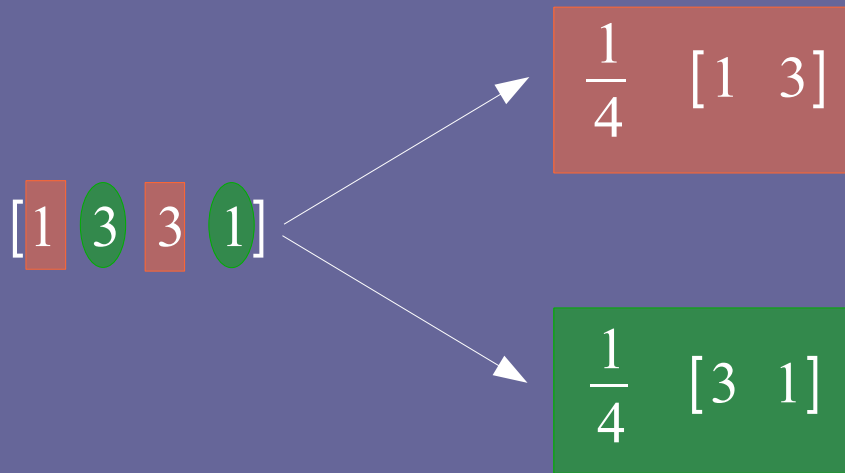
- C'est la Box-spline d'ordre 3 (degré 2)

$$\begin{array}{cccc} \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \quad \equiv \quad [1 \ 1] * [1 \ 1] * [1 \ 1] = [1 \ 2 \ 1] * [1 \ 1]$$

ou

$$(1+z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + z^3$$

D'où les règles de subdivision

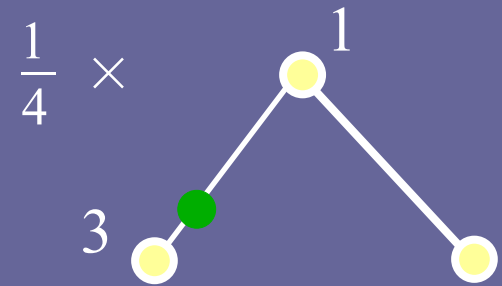
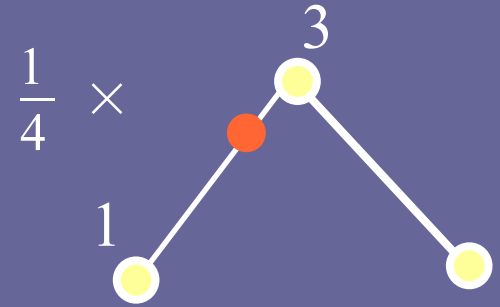


D'où les règles de subdivision

[1 3 3 1]

$\frac{1}{4}$ [1 3]

$\frac{1}{4}$ [3 1]



Masques des Box-splines

- A ce niveau, on peut remarquer que les masques suivent le triangle de Pascal :

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

...

Box-spline à 2 directions (ordre 2 \Rightarrow degré 1 \Rightarrow continuité C^0)

Box-spline à 3 directions (ordre 3 \Rightarrow degré 2 \Rightarrow continuité C^1)

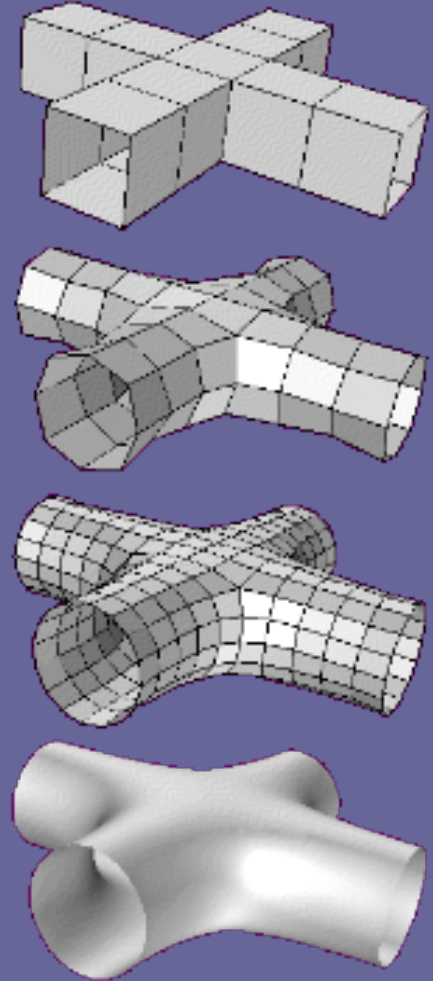
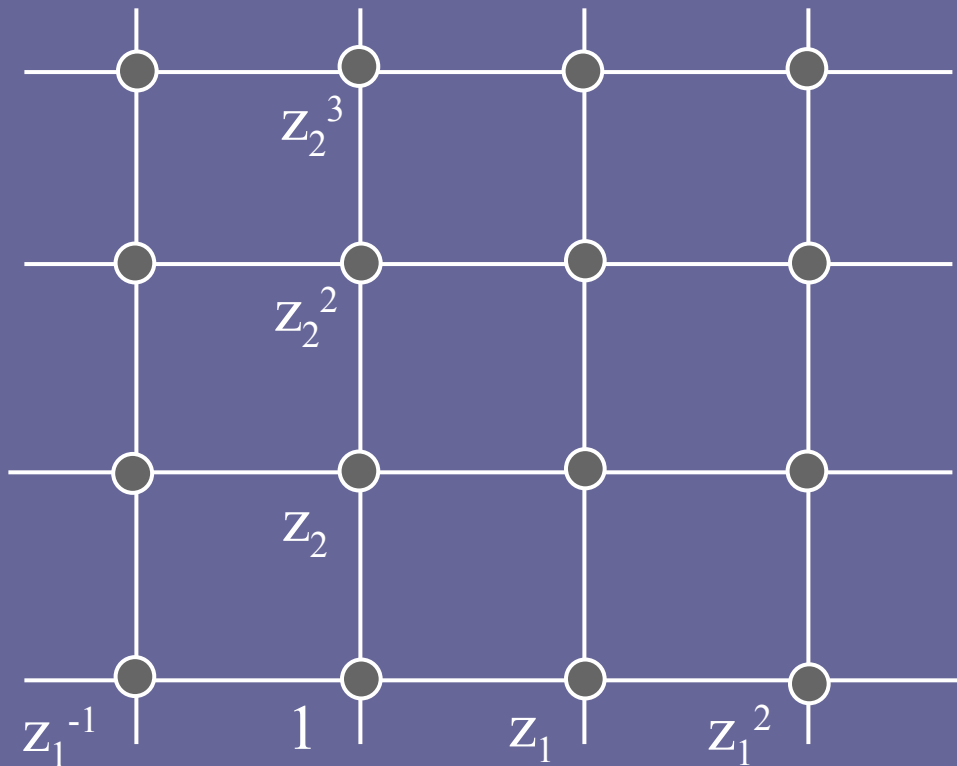
Box-spline à 4 directions (ordre 4 \Rightarrow degré 3 \Rightarrow continuité C^2)

Box-spline à 5 directions (ordre 5 \Rightarrow degré 4 \Rightarrow continuité C^3)

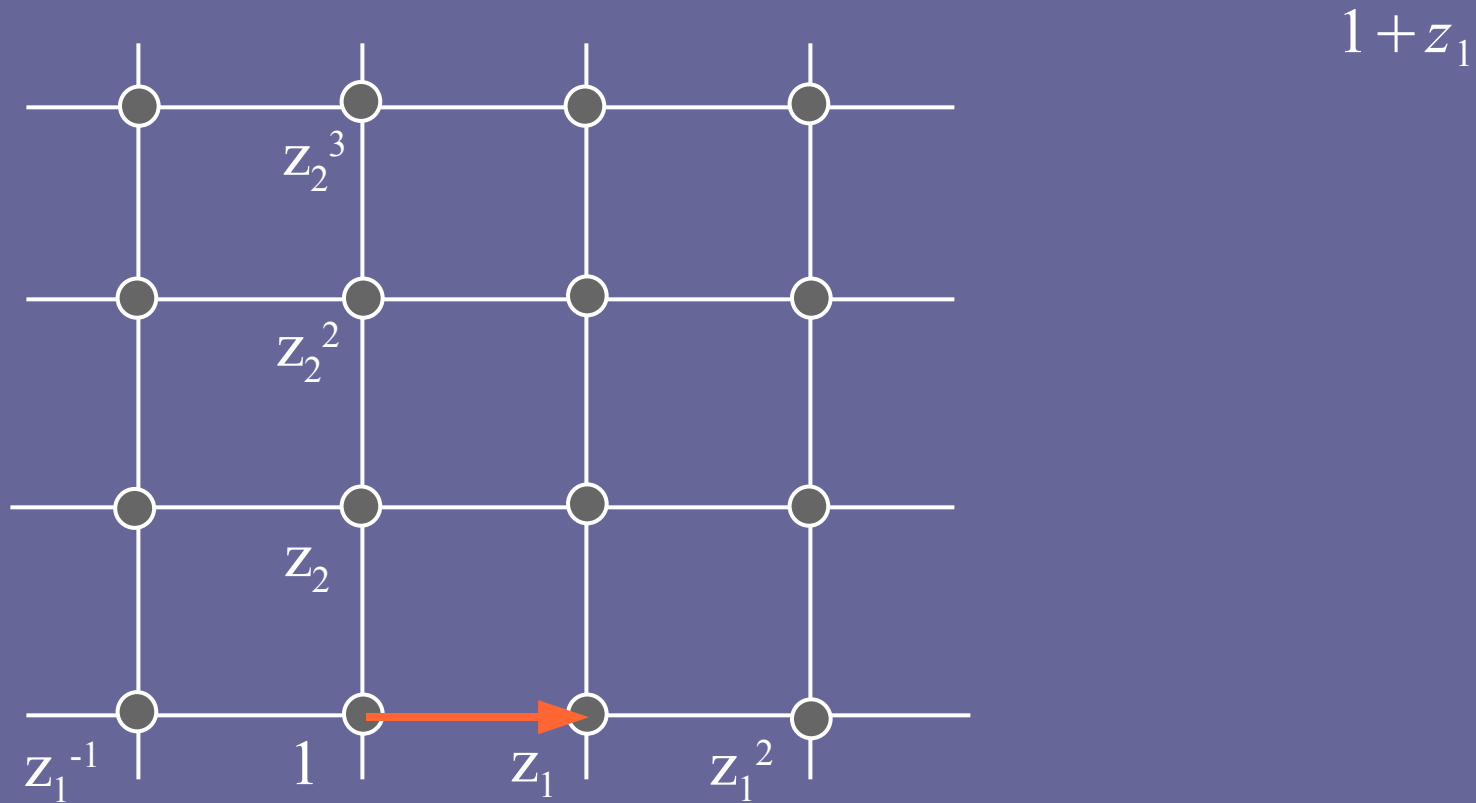
Passage aux surfaces

Grilles de quadrilatères

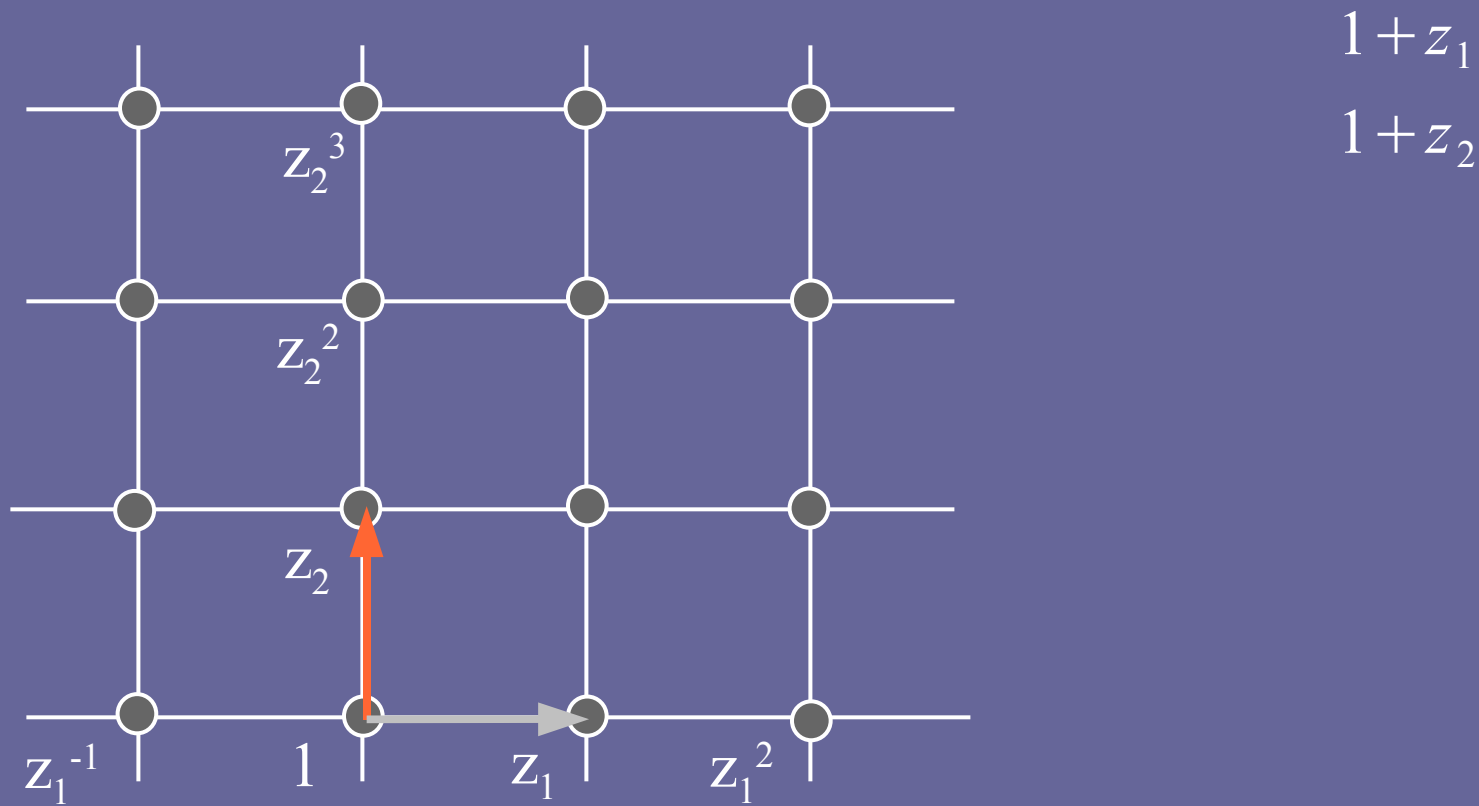
- Les directions sur une grille de quadrilatères :



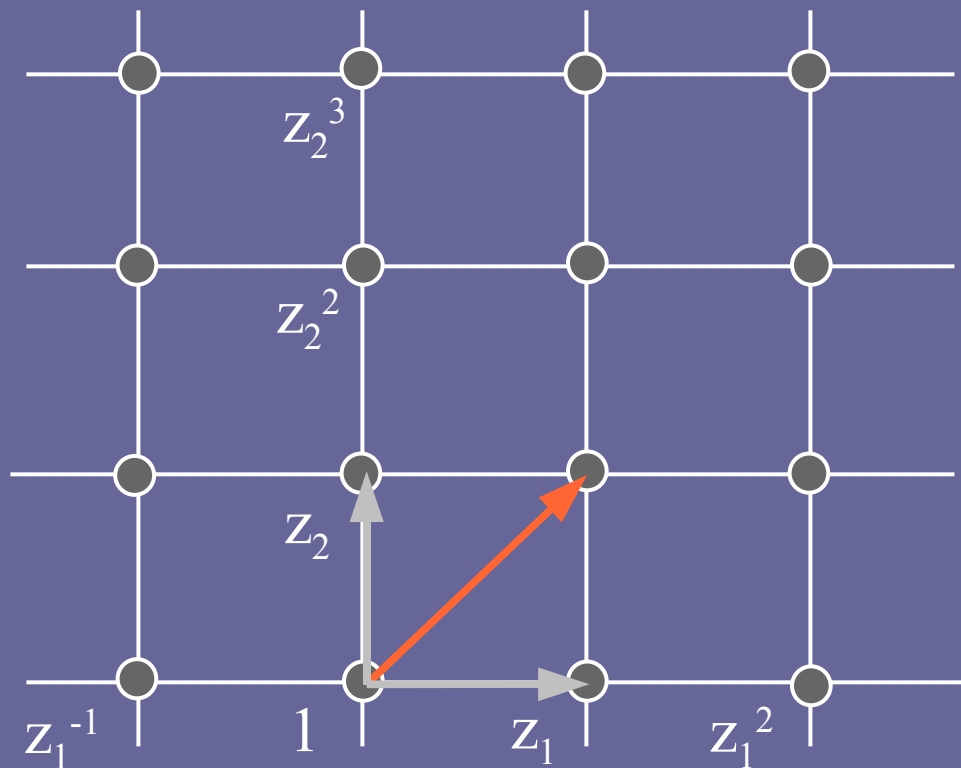
Les directions sur les grilles de quadrilatères



Les directions sur les grilles de quadrilatères



Les directions sur les grilles de quadrilatères

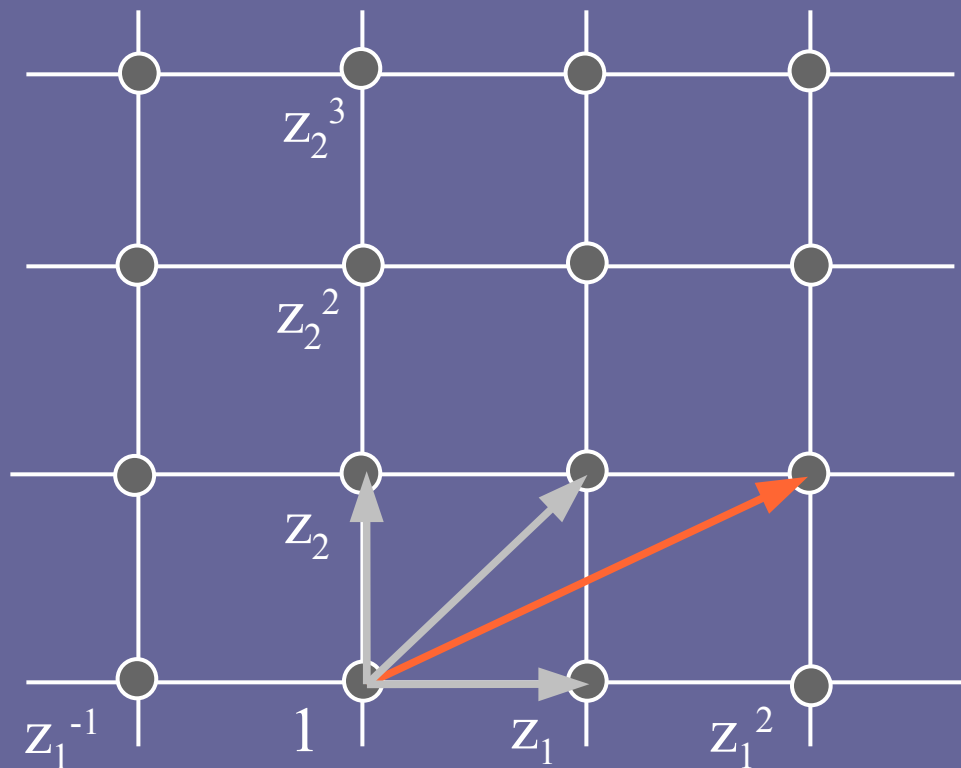


$$1 + z_1$$

$$1 + z_2$$

$$1 + z_1 z_2$$

Les directions sur les grilles de quadrilatères



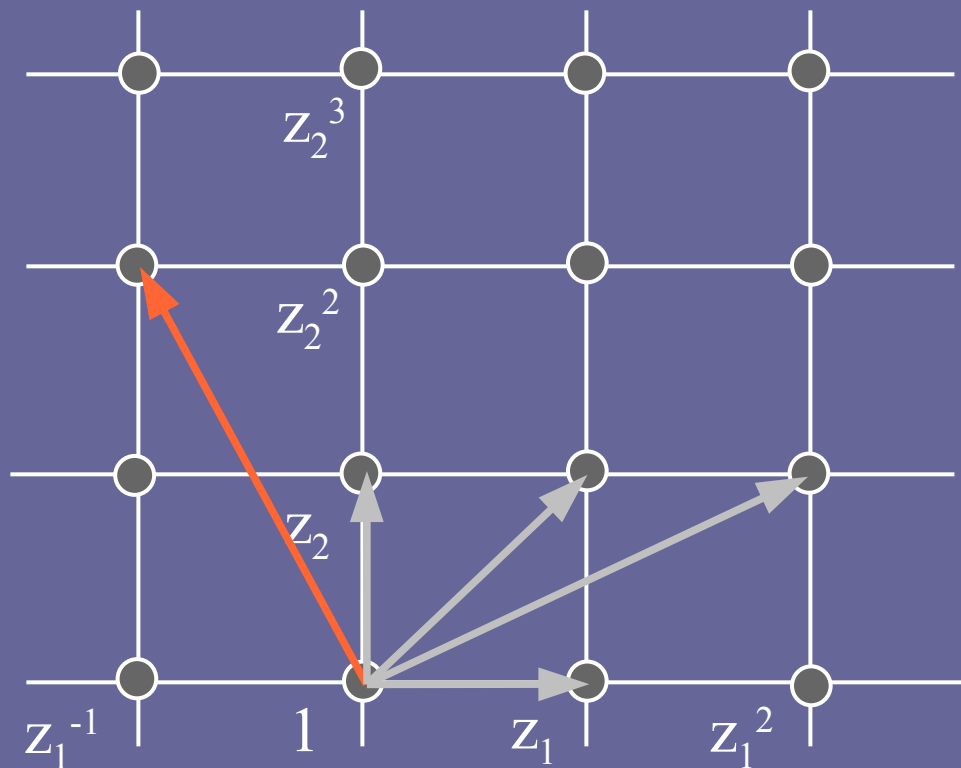
$$1 + z_1$$

$$1 + z_2$$

$$1 + z_1 z_2$$

$$1 + z_1^2 z_2$$

Les directions sur les grilles de quadrilatères



$$1 + z_1$$

$$1 + z_2$$

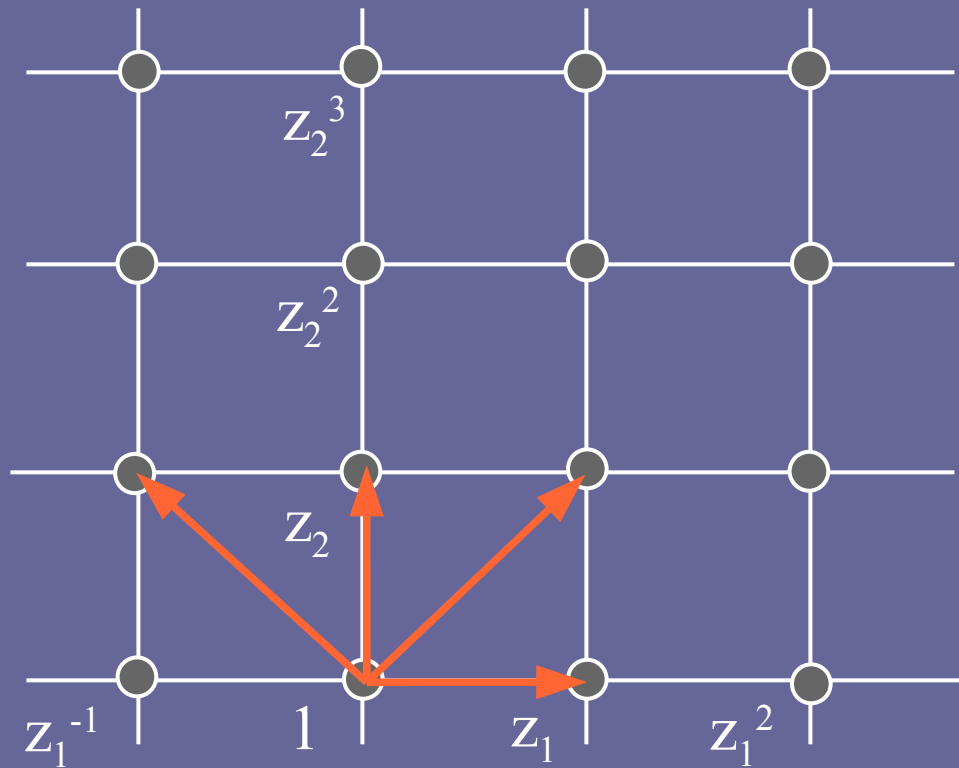
$$1 + z_1 z_2$$

$$1 + z_1^2 z_2$$

$$1 + \frac{z_2^2}{z_1}$$

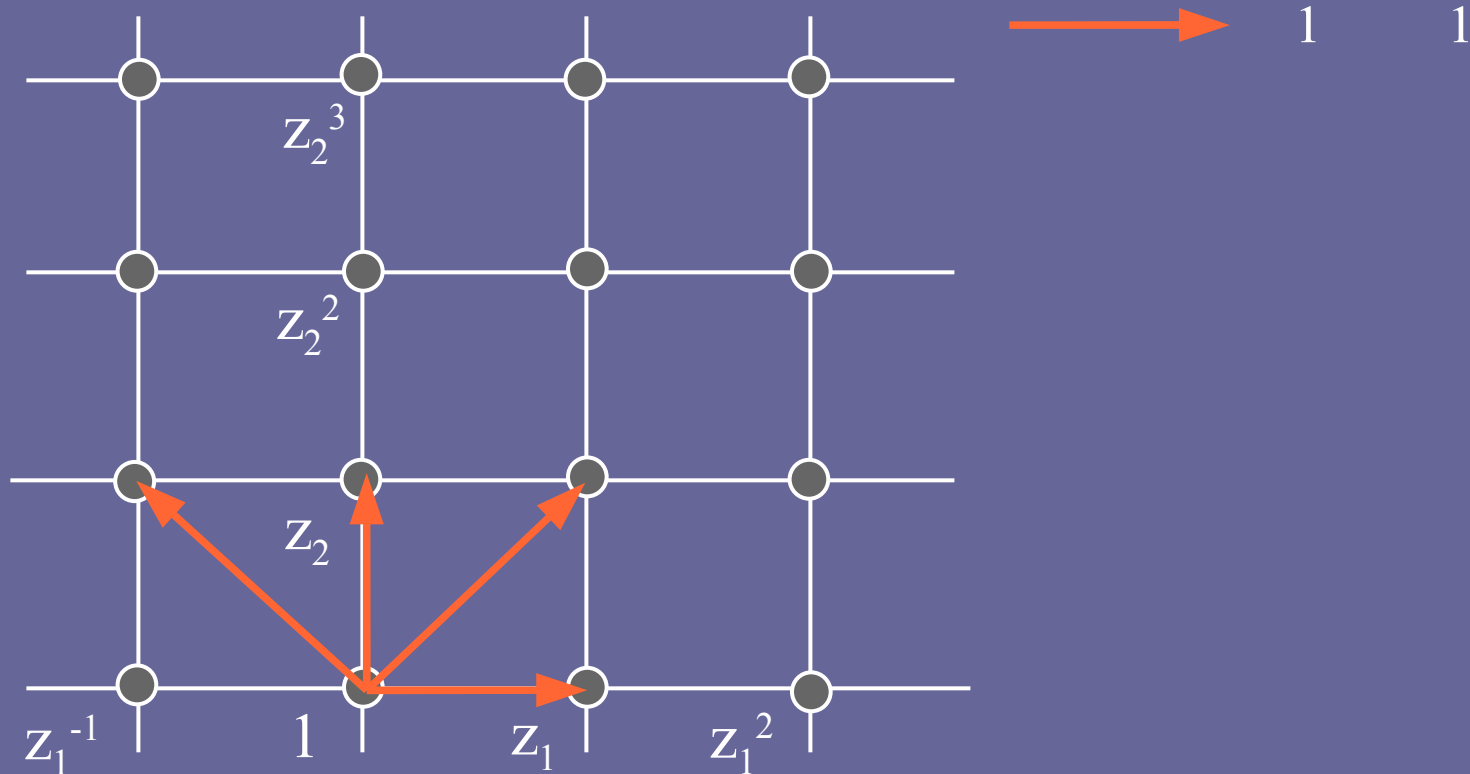
Pour créer un schéma

- On choisit les directions :



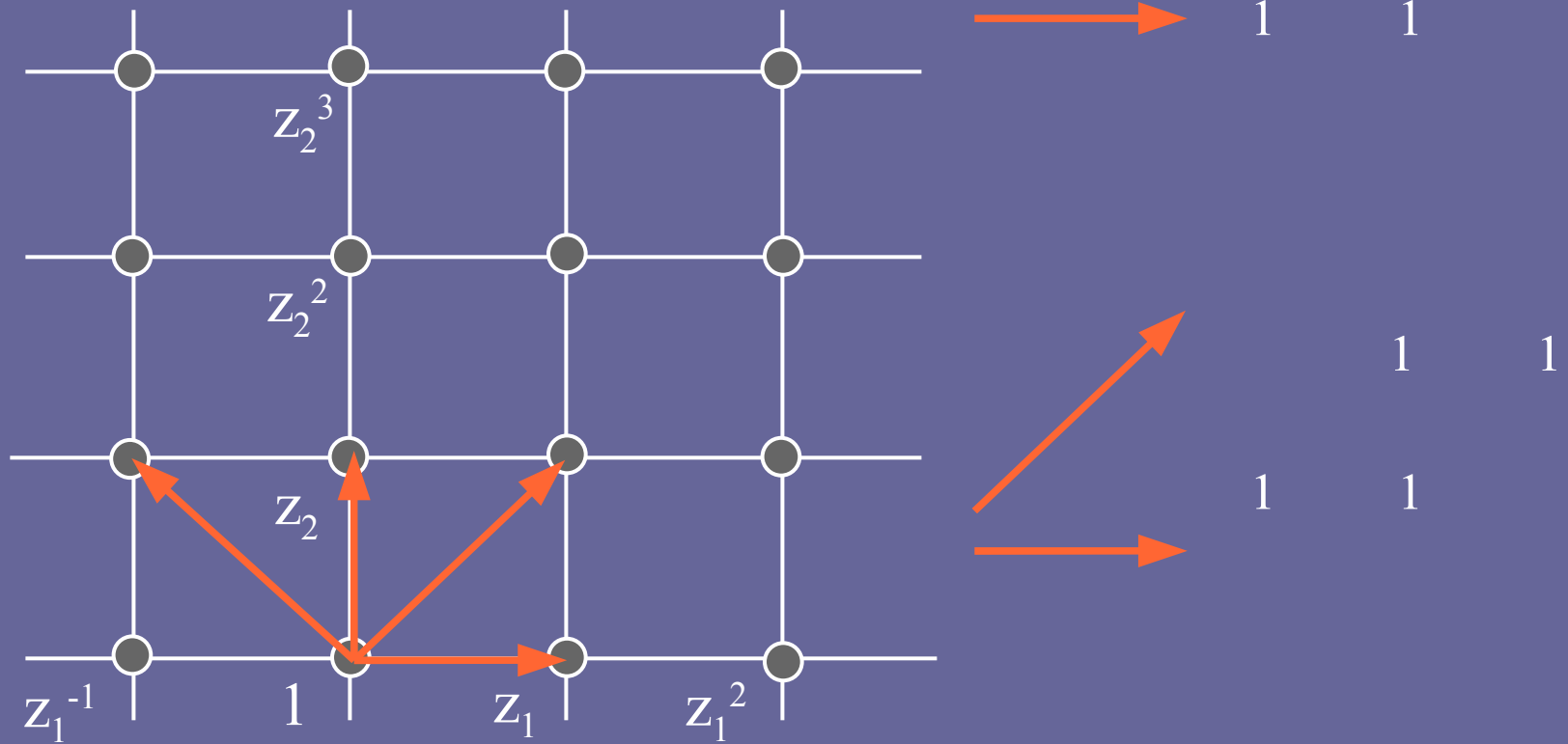
Calcul du masque

- Convolution discrète :



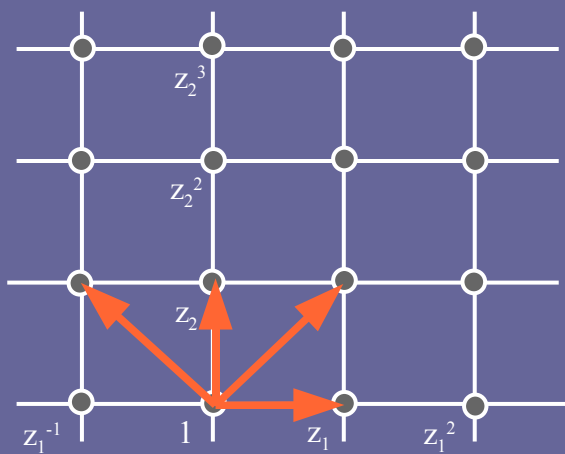
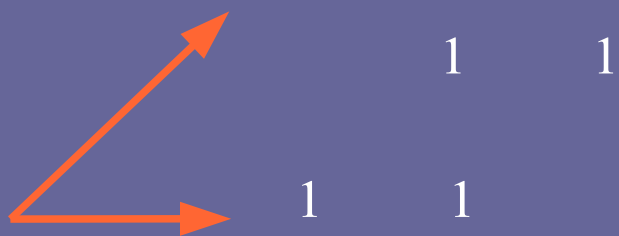
Calcul du masque

- Convolution discrète :



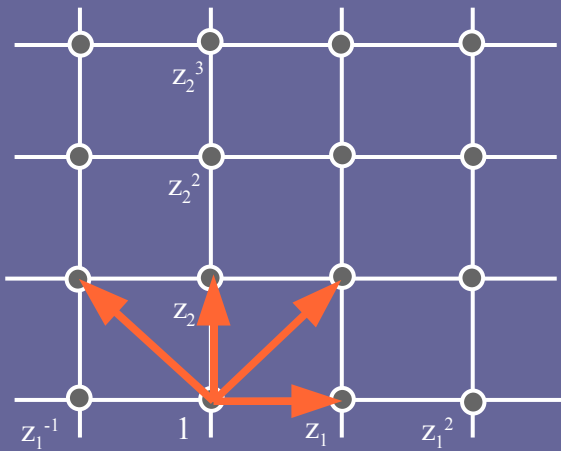
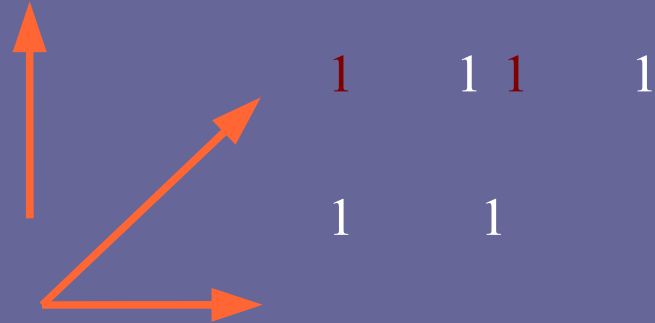
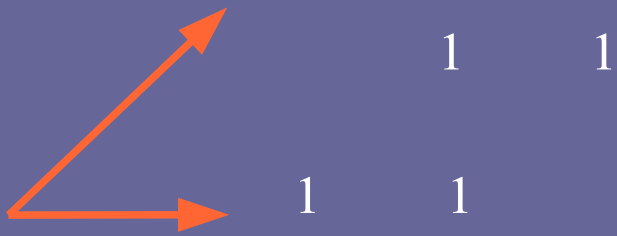
Calcul du masque

- Convolution discrète :



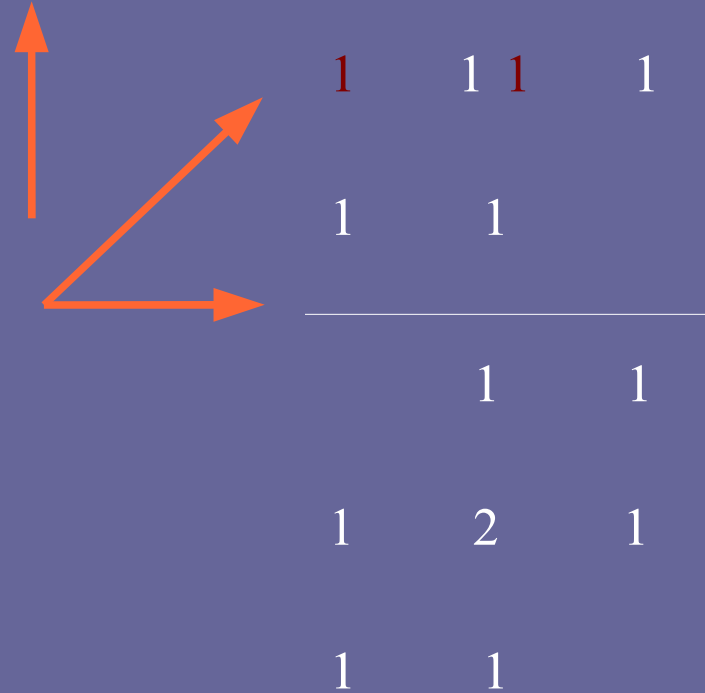
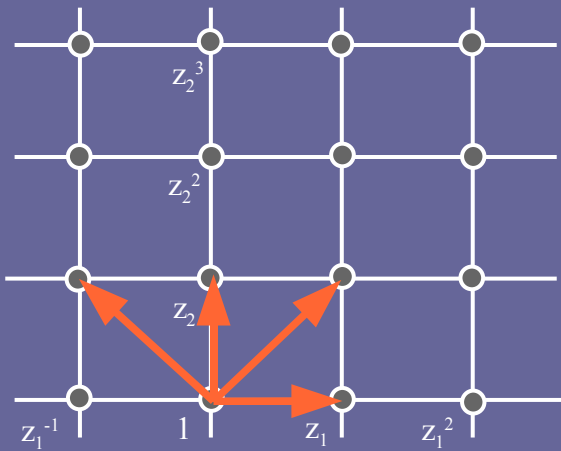
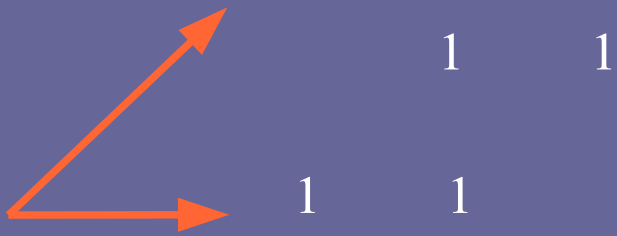
Calcul du masque

- Convolution discrète :



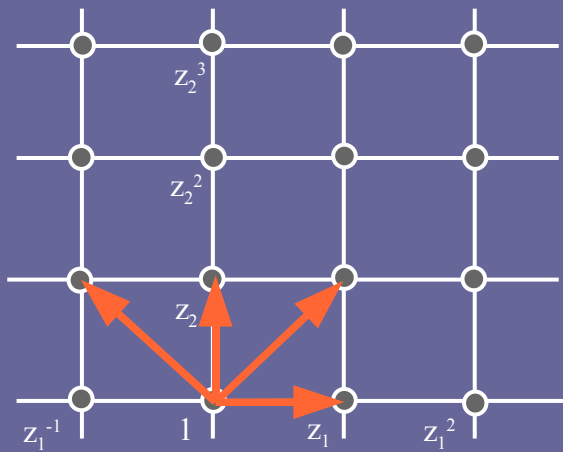
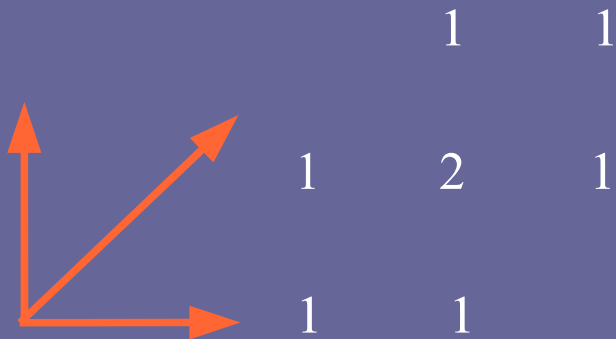
Calcul du masque

- Convolution discrète :



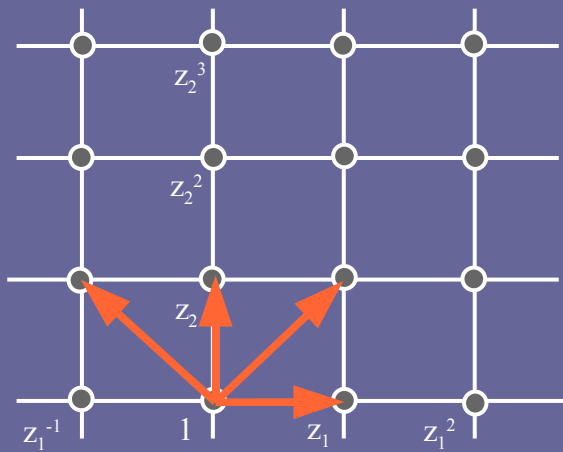
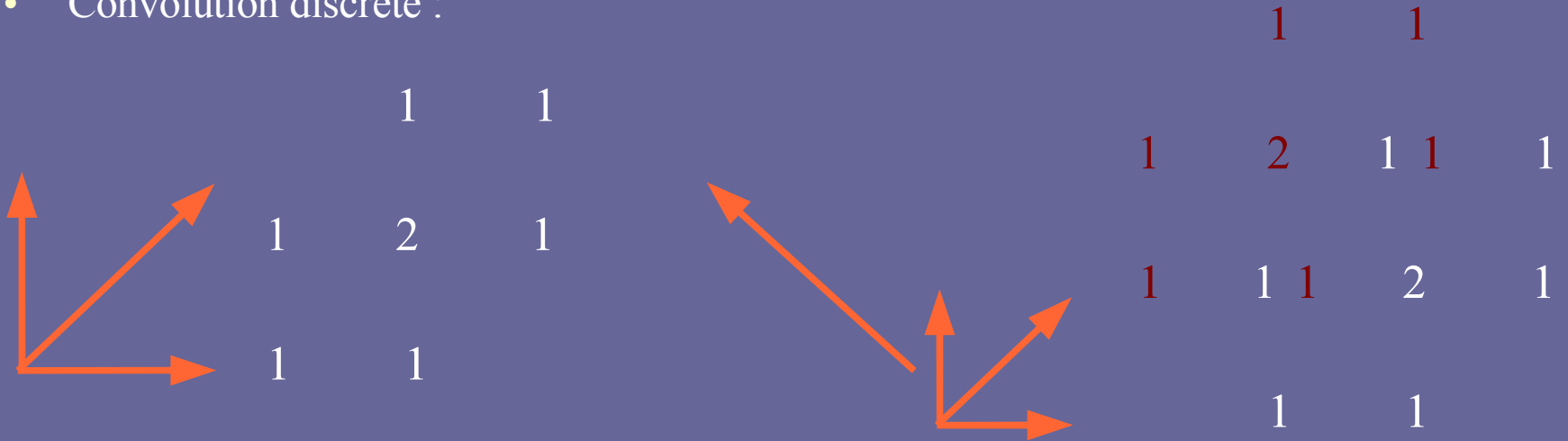
Calcul du masque

- Convolution discrète :



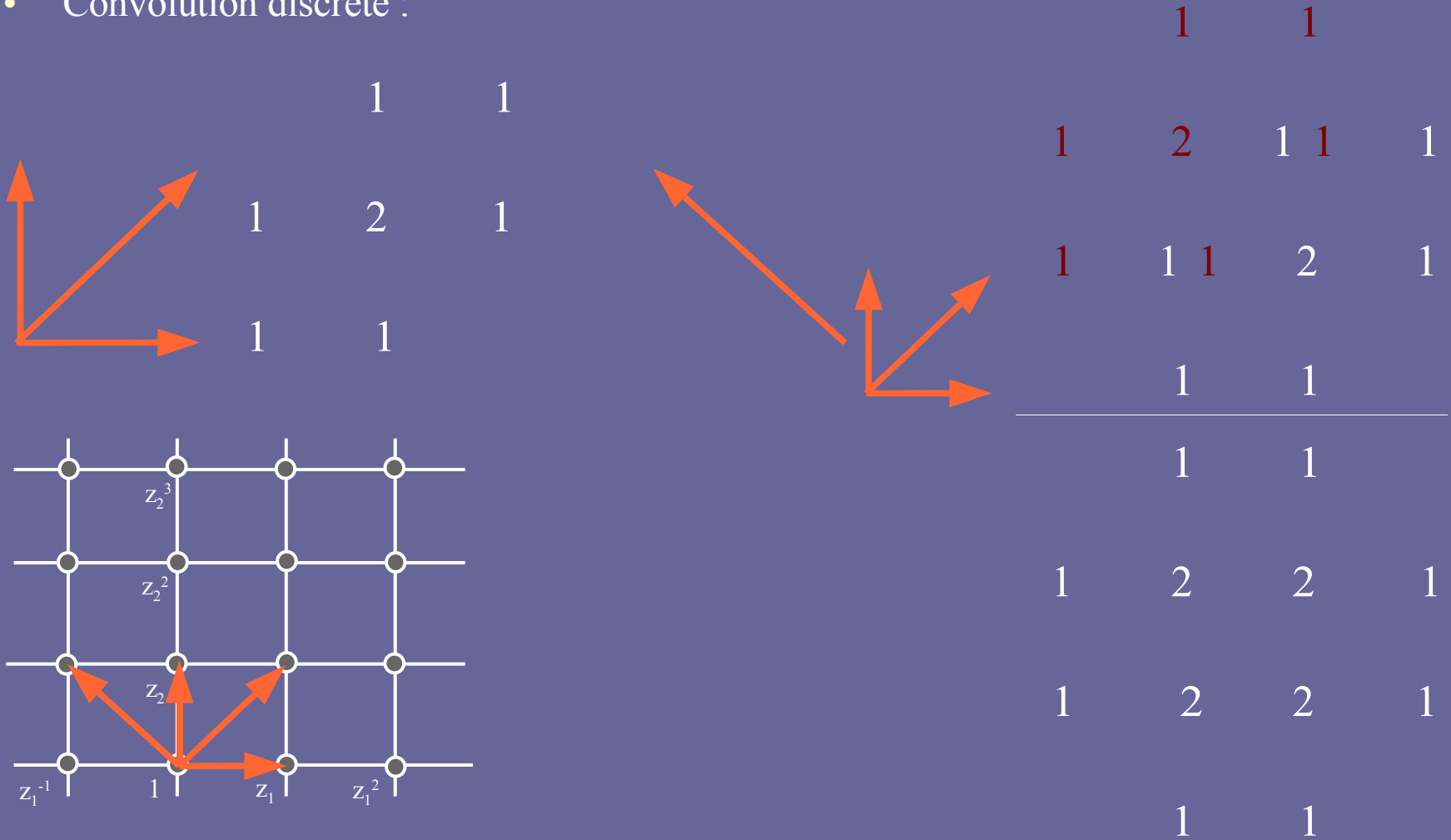
Calcul du masque

- Convolution discrète :



Calcul du masque

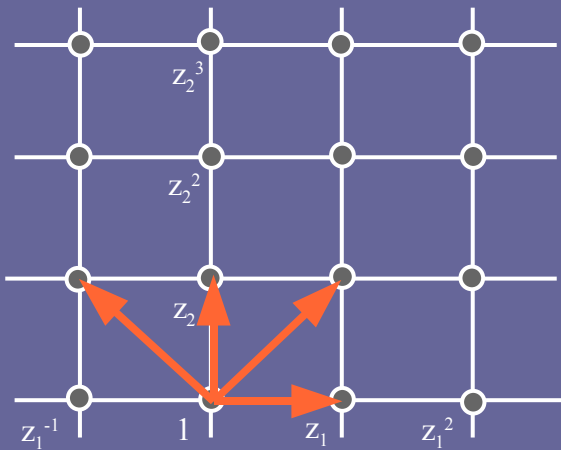
- Convolution discrète :



Calcul du masque

- Produit de polynômes de Laurent :

$$p(z) = (1 + z_1)(1 + z_1 z_2)(1 + z_2)(1 + z_2/z_1)$$

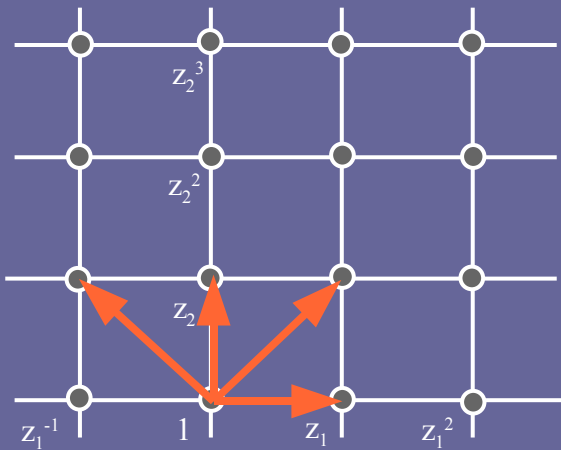


Calcul du masque

- Produit de polynômes de Laurent :

$$p(z) = (1 + z_1)(1 + z_1 z_2)(1 + z_2)(1 + z_2 / z_1)$$

$$p(z) = 1 + z_1 + z_2 / z_1 + 2 z_2 + 2 z_1 z_2 + z_1^2 z_2 + z_2^2 / z_1 + 2 z_2^2 + 2 z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^3 + z_1 z_2^3$$

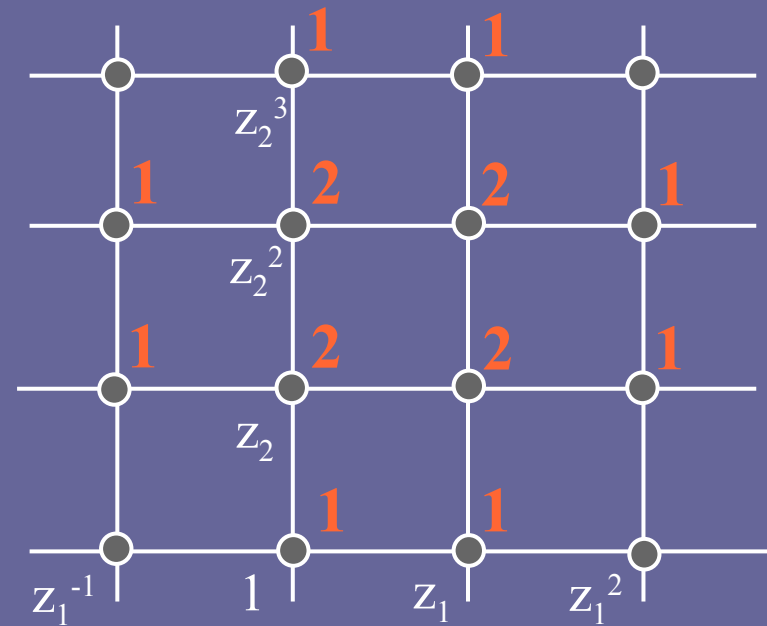
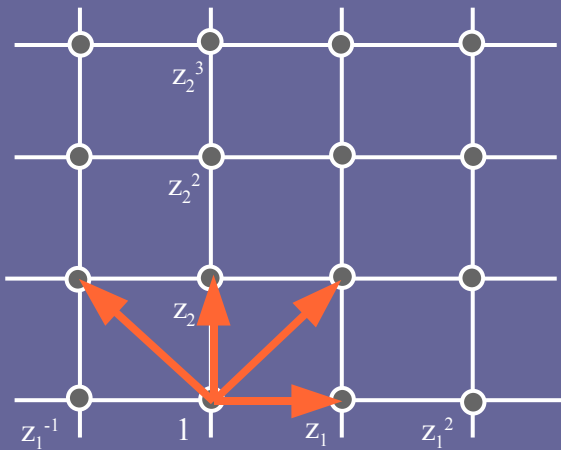


Calcul du masque : 2^{ème} possibilité

- Produit de polynômes de Laurent :

$$p(z) = (1 + z_1)(1 + z_1 z_2)(1 + z_2)(1 + z_2/z_1)$$

$$p(z) = 1 + z_1 + z_2/z_1 + 2z_2 + 2z_1 z_2 + z_1^2 z_2 + z_2^2/z_1 + 2z_2^2 + 2z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^3 + z_1 z_2^3$$



Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :

	1	1	
1	2	2	1
1	2	2	1
	1	1	

Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

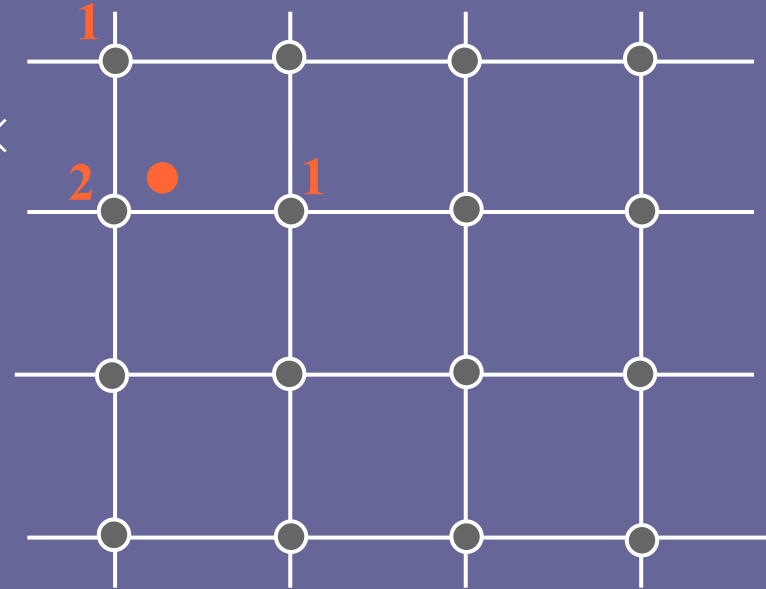
$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

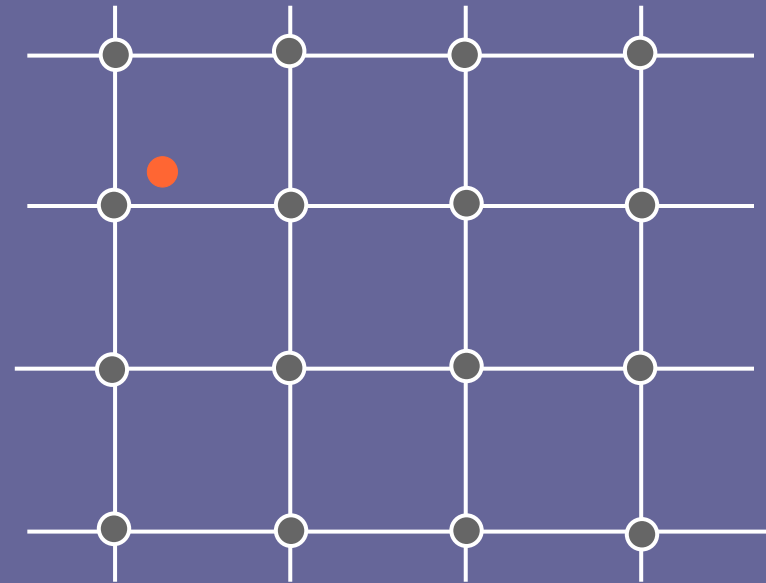
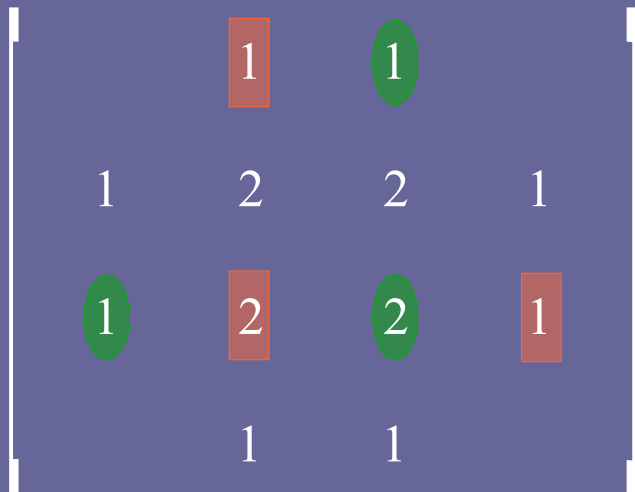
$$\frac{1}{4} \times$$



$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :

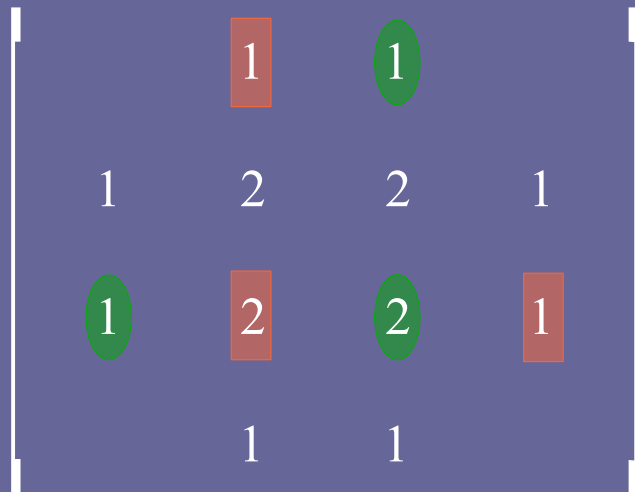


$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

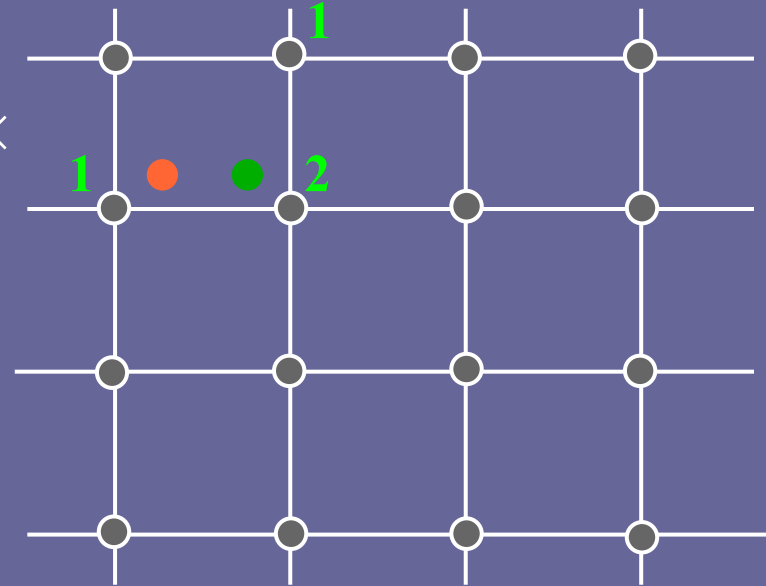
$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :



$\frac{1}{4} \times$

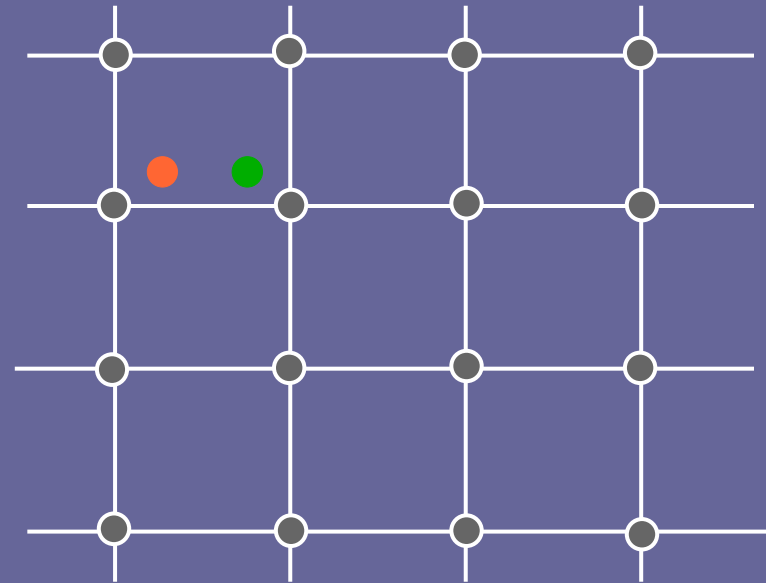
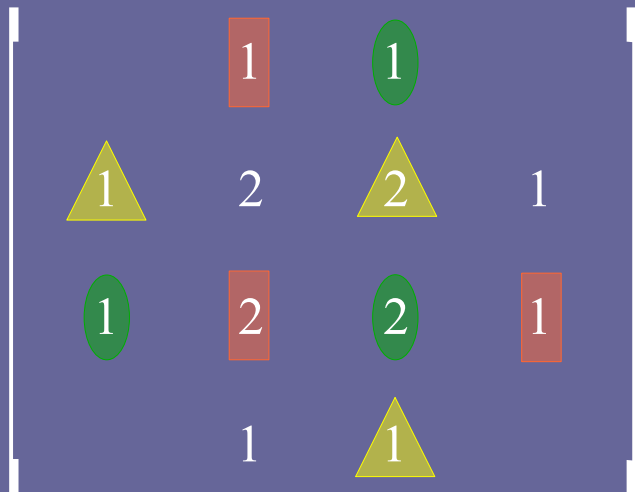


$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :



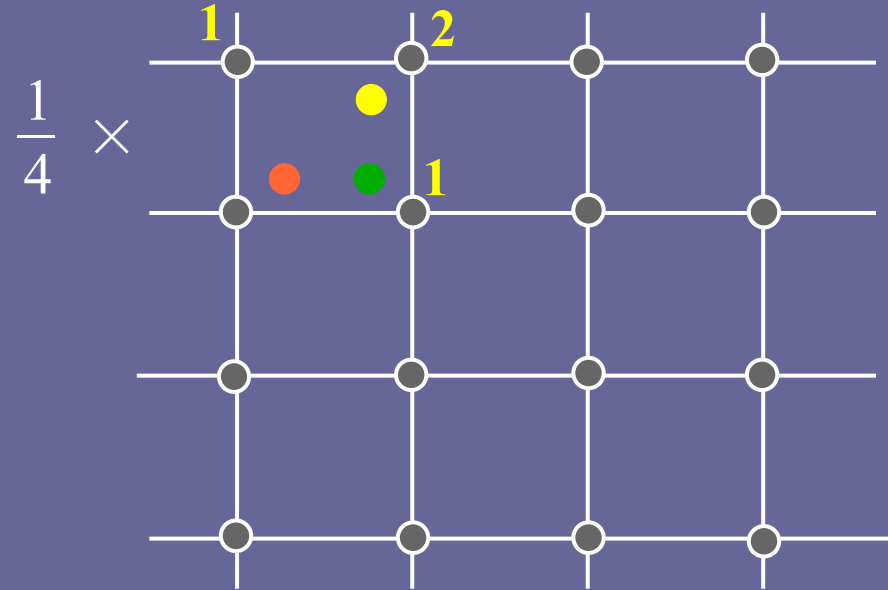
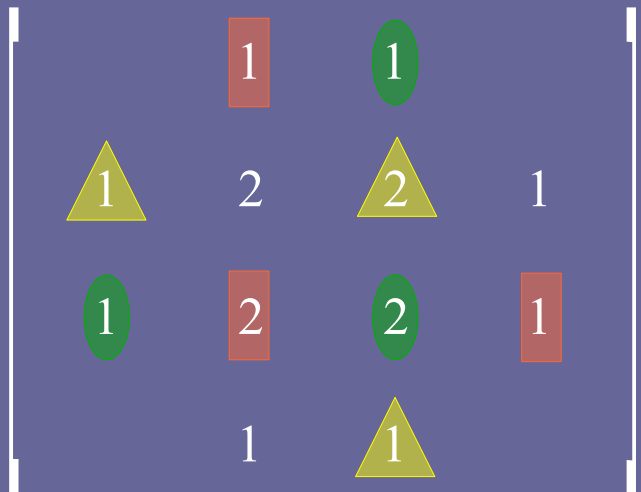
$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :



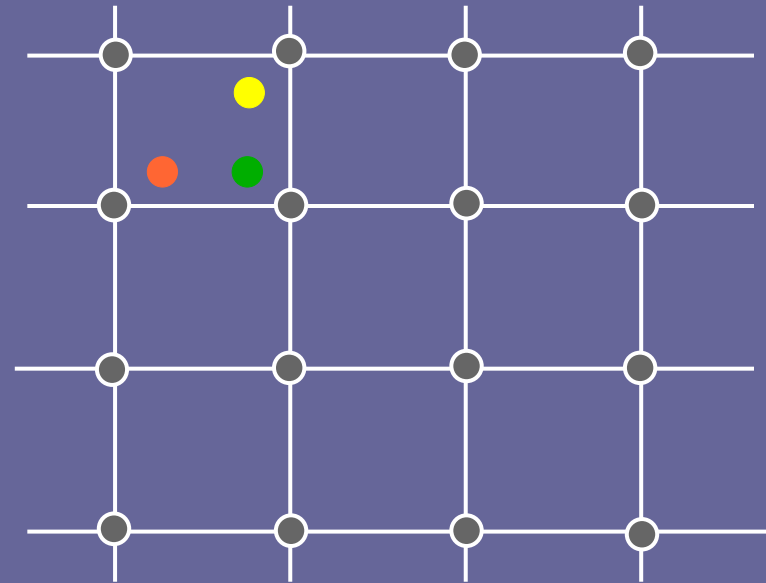
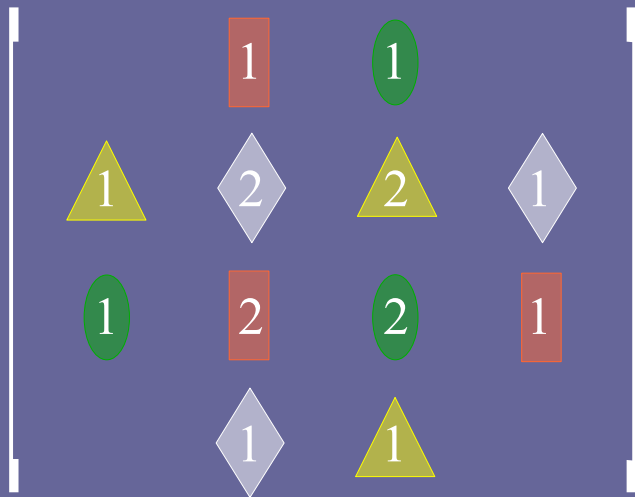
$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :



$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

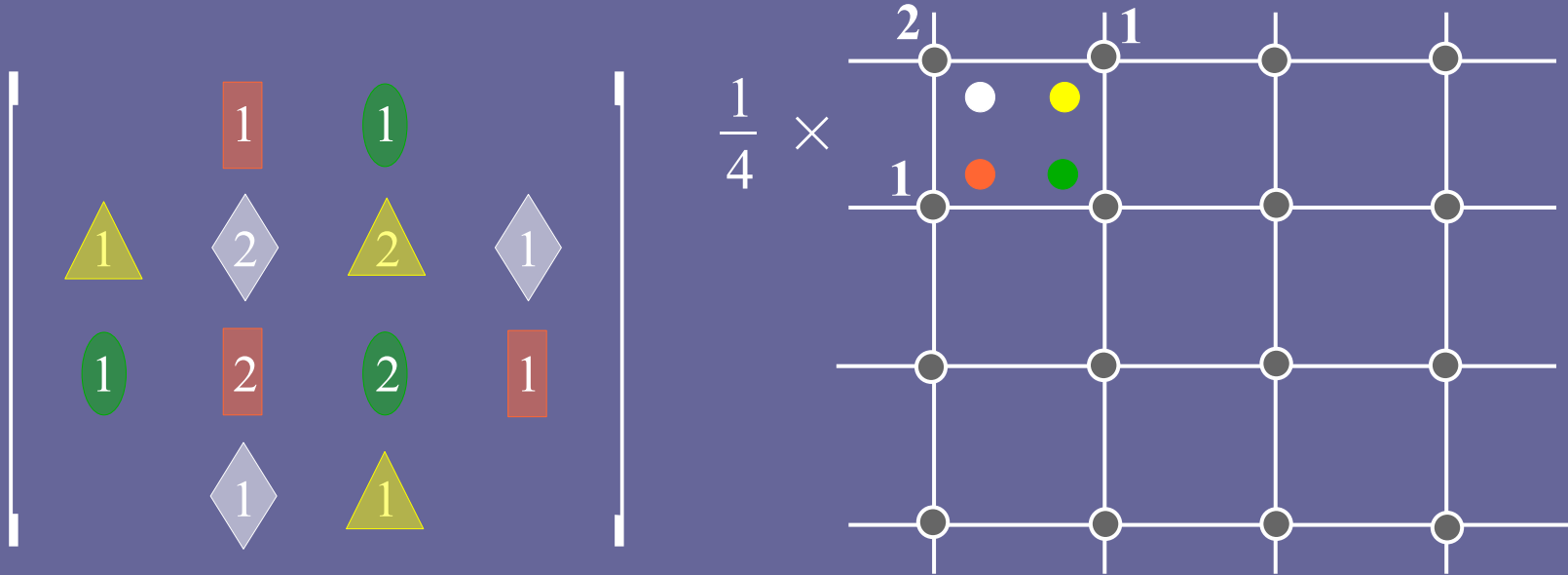
$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- A partir du masque, on déduit les règles de subdivision :



$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

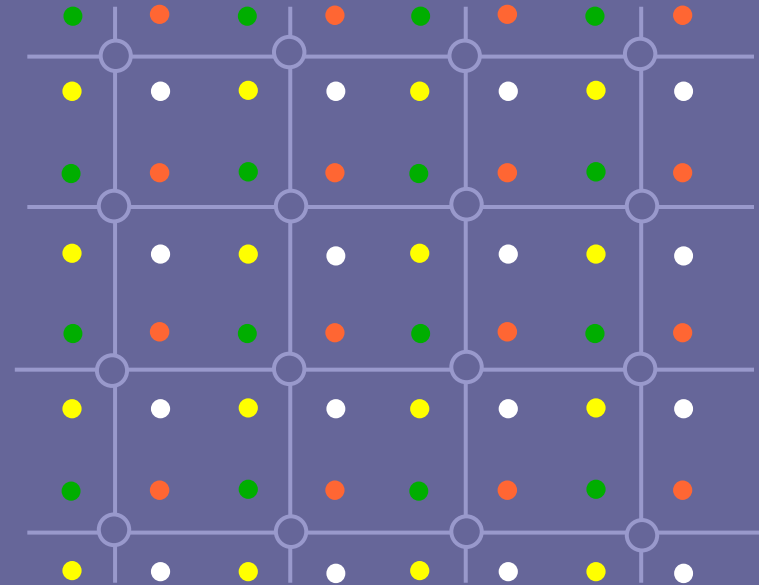
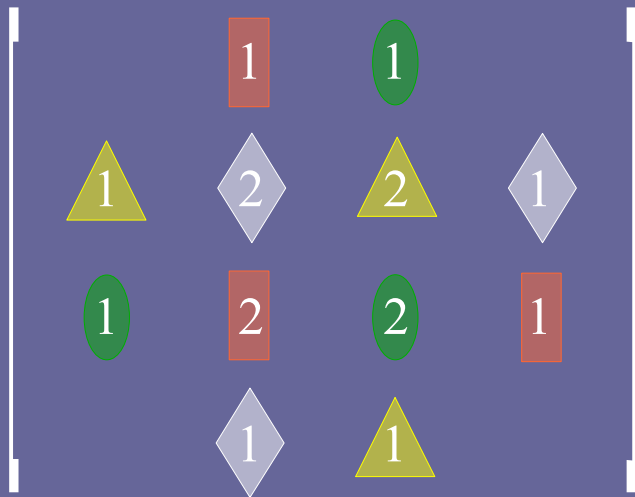
$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- Les règles sont appliquées à chaque face du maillage :



$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

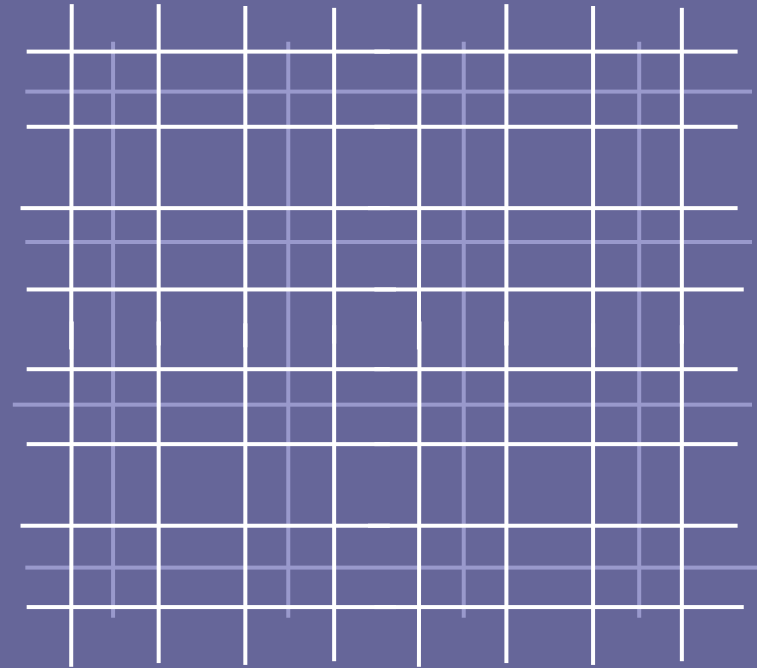
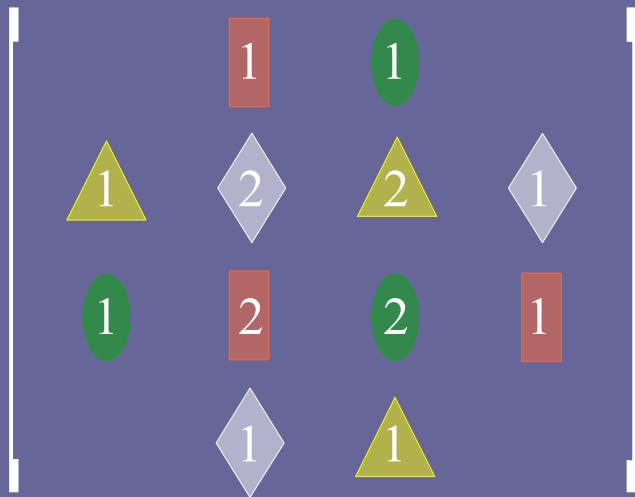
$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

Règles de subdivision

- Et en maillant les nouveaux points, on obtient le maillage après un pas de subdivision



$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Continuité de la surface limite

- Dans le cas bidirectionnel (maillages de quadrilatères ou triangulaires), la continuité est obtenue avec la règle suivante :
 - On part du nombre de directions
 - Ici : 4

Continuité de la surface limite

- Dans le cas bidirectionnel (maillages de quadrilatères ou triangulaires), la continuité est obtenue avec la règle suivante :
 - On part du nombre de directions
 - Ici : 4
 - On sélectionne le plus grand ensemble de directions qui sont dans le même sens, et on retire leur quantité
 - Ici : 4 ensembles de 1 direction. Le plus grand a donc 1 direction : $4 - 1 = 3$

Continuité de la surface limite

- Dans le cas bidirectionnel (maillages de quadrilatères ou triangulaires), la continuité est obtenue avec la règle suivante :
 - On part du nombre de directions
 - Ici : **4**
 - On sélectionne le plus grand ensemble de directions qui sont dans le même sens, et on retire leur quantité
 - Ici : 4 ensembles de 1 direction. Le plus grand a donc 1 direction : $4 - 1 = \mathbf{3}$
 - On retire 2 au nombre restant
 - Ici : $3 - 2 = \mathbf{1}$

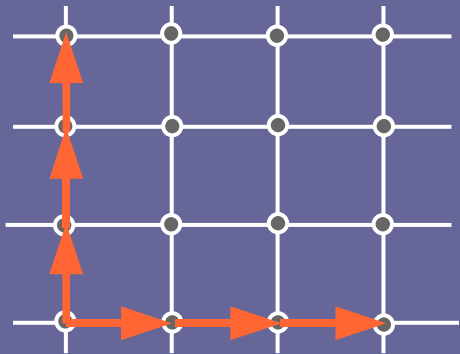
Continuité de la surface limite

- Dans le cas bidirectionnel (maillages de quadrilatères ou triangulaires), la continuité est obtenue avec la règle suivante :
 - On part du nombre de directions
 - Ici : **4**
 - On sélectionne le plus grand ensemble de directions qui sont dans le même sens, et on retire leur quantité
 - Ici : 4 ensembles de 1 direction. Le plus grand a donc 1 direction : $4 - 1 = \mathbf{3}$
 - On retire 2 au nombre restant
 - Ici : $3 - 2 = \mathbf{1}$
 - Le nombre final est la continuité de la surface limite
 - Ici, la continuité de la surface limite est **C¹**

Schémas classiques

Doo-Sabin [DS78]

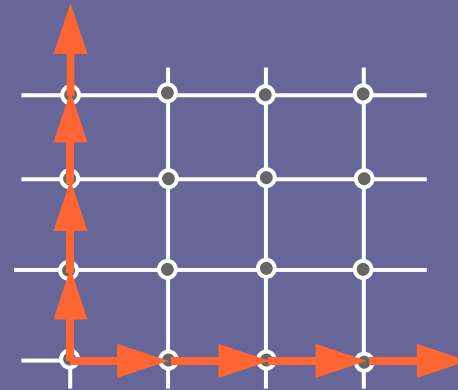
Box spline à 6 directions, continuité C^1



$$\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Catmull-Clark [CC78]

Box spline à 8 directions, continuité C^2

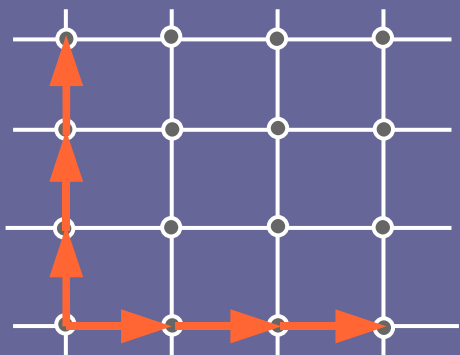


$$\frac{1}{64} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Comparaisons

Doo-Sabin

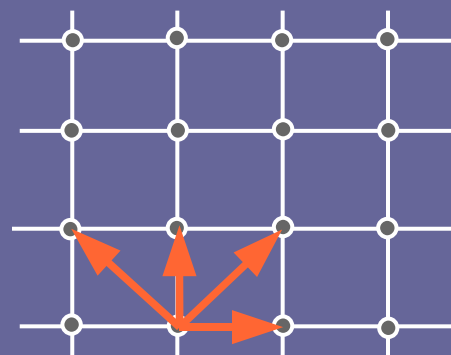
Continuité C^1



$$\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Box-spline à 4 directions

Continuité C^1

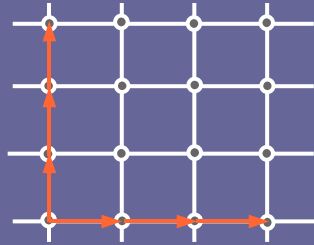


$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

Précision linéaire

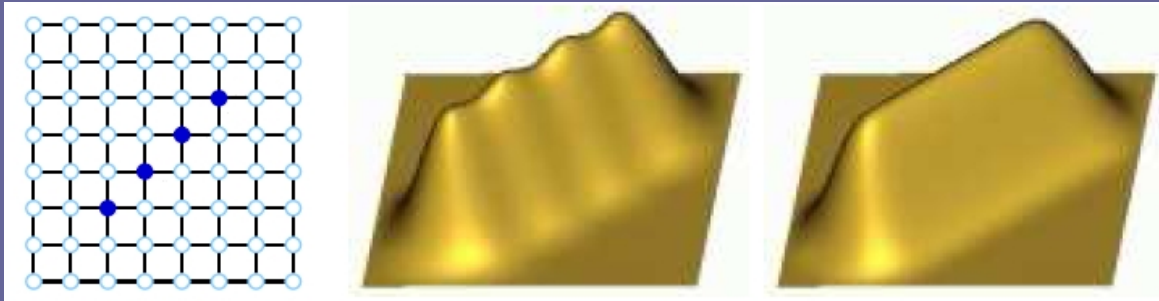
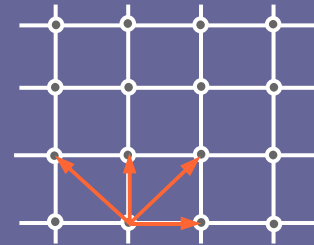
Doo-Sabin (1978)

Précision linéaire dans 2 directions



Box-spline à 4 directions

Précision linéaire dans 4 directions

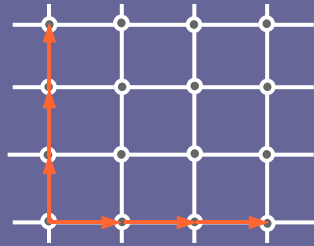


Images de [PS04]

Précision linéaire

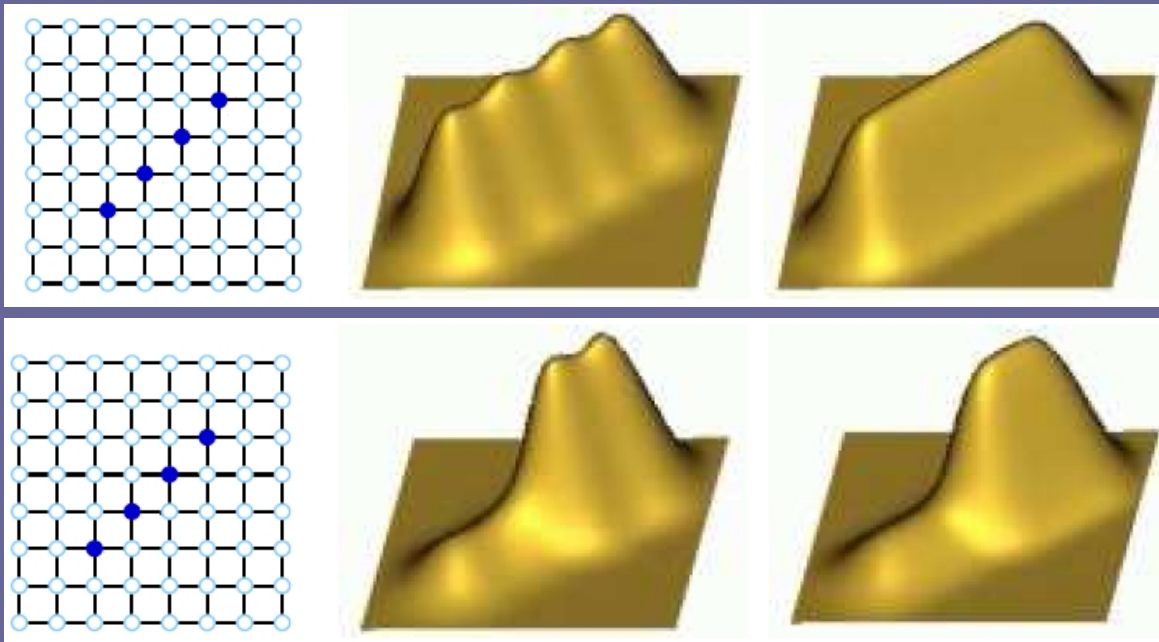
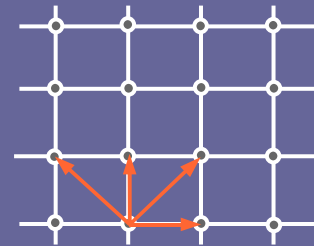
Doo-Sabin

Précision linéaire dans 2 directions



Box-spline à 4 directions

Précision linéaire dans 4 directions

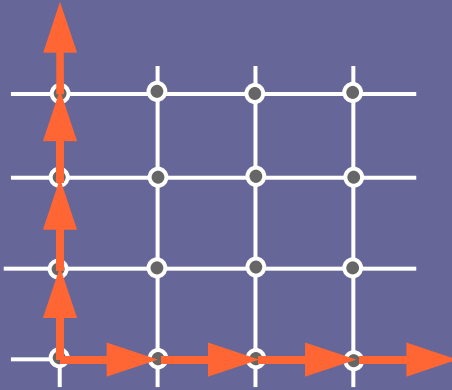


Images de [PS04]

Comparaison

Catmull-Clark (1978)

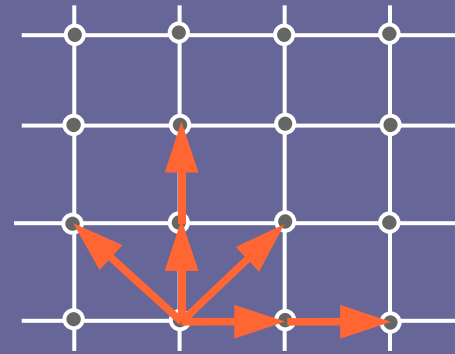
Box-spline à 8 directions, continuité C^2


$$\frac{1}{64} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Box-spline à 6 directions (2004)

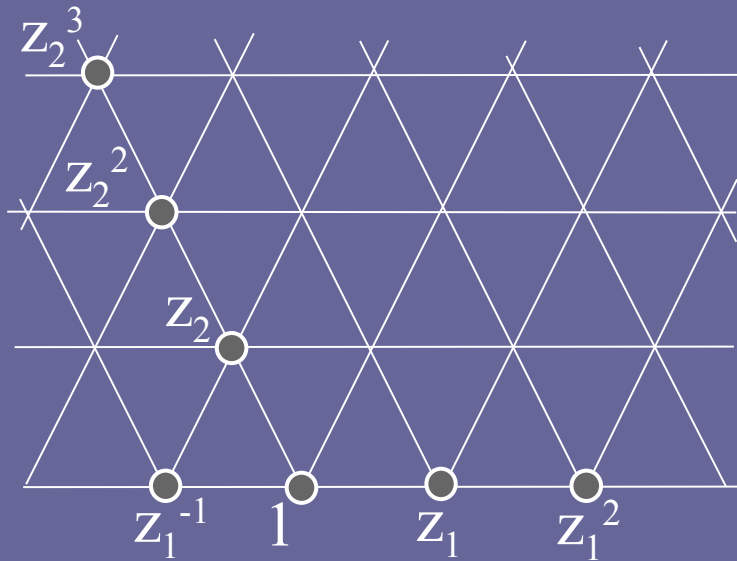
Continuité C^2

[PS04]


$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & \end{bmatrix}$$

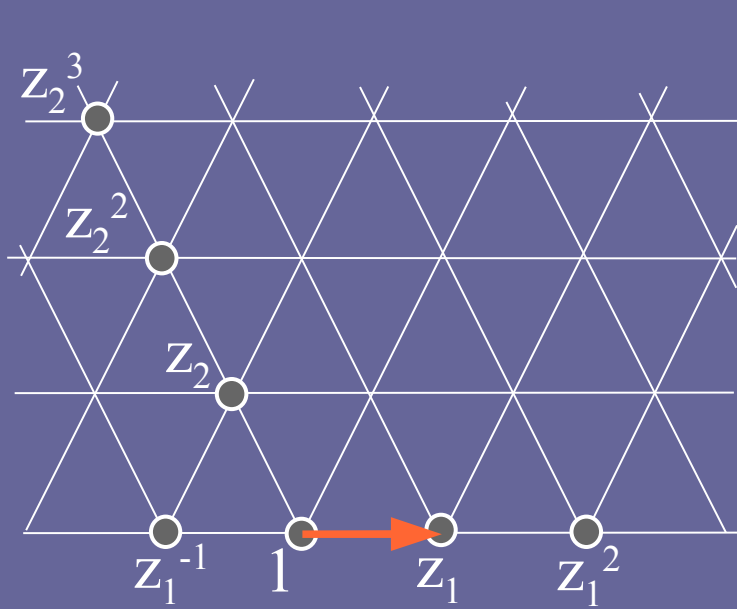
Grilles triangulaires

- Les directions sur une grille triangulaire :



Grilles triangulaires

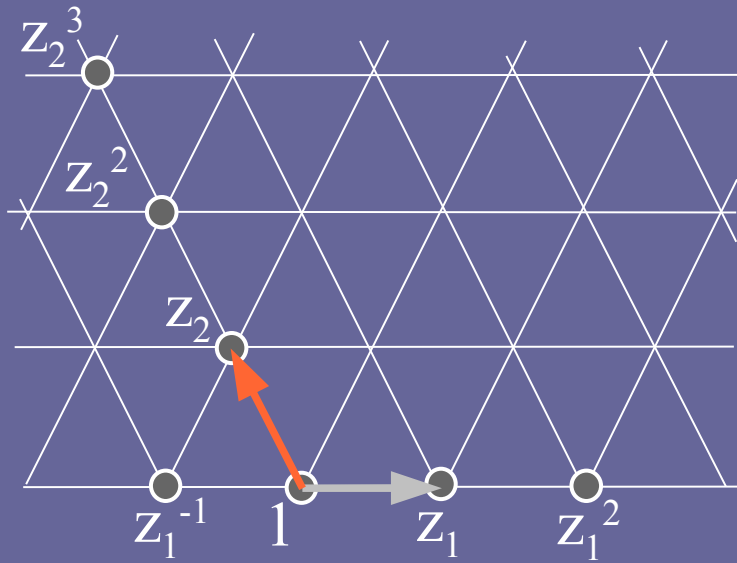
- Les directions sur une grille triangulaire :



$$1 + z_1$$

Grilles triangulaires

- Les directions sur une grille triangulaire :

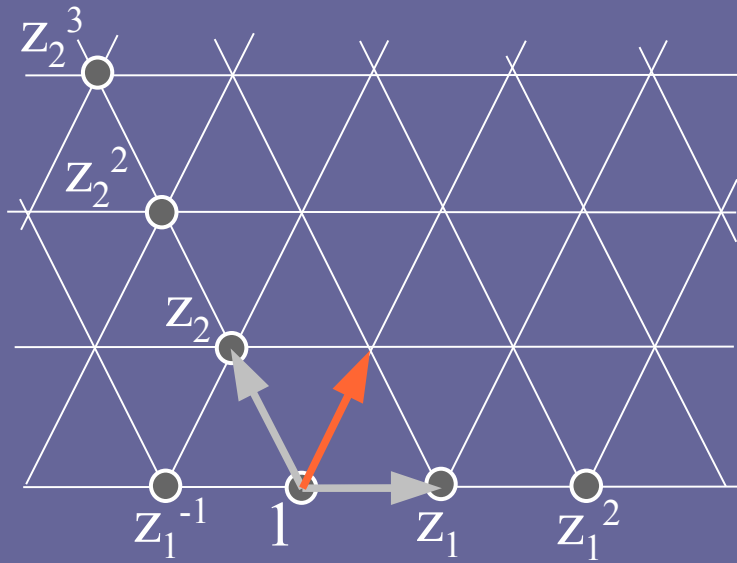


$$1 + z_1$$

$$1 + z_2$$

Grilles triangulaires

- Les directions sur une grille triangulaire :



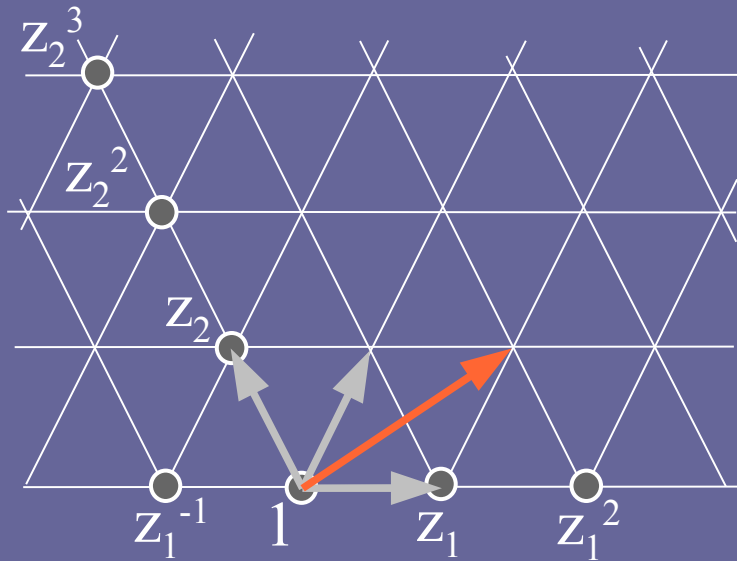
$$1 + z_1$$

$$1 + z_2$$

$$1 + z_1 z_2$$

Grilles triangulaires

- Les directions sur une grille triangulaire :



$$1 + z_1$$

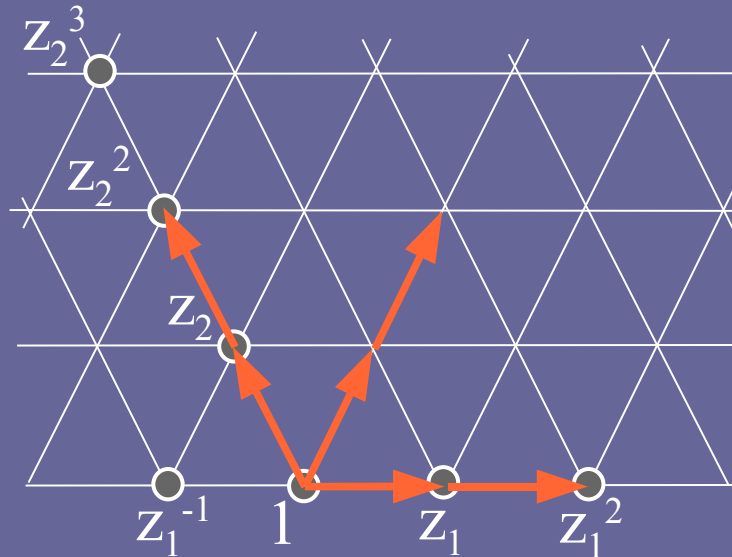
$$1 + z_2$$

$$1 + z_1 z_2$$

$$1 + z_1^2 z_2$$

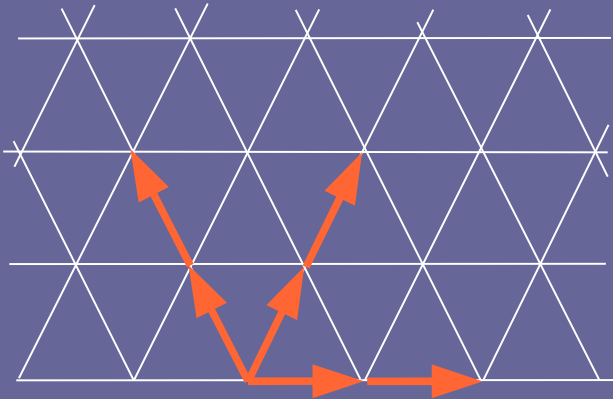
Calcul du masque

- Un masque est calculé à partir des directions, comme illustré jusqu'à maintenant.
 - Soit avec des convolutions discrètes
 - Soit en faisant le produit des polynômes de Laurent



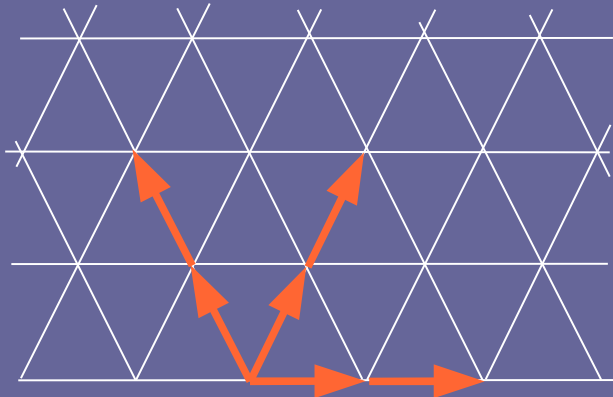
Exemple

- Box-spline à 6 directions (3×2) :



Exemple

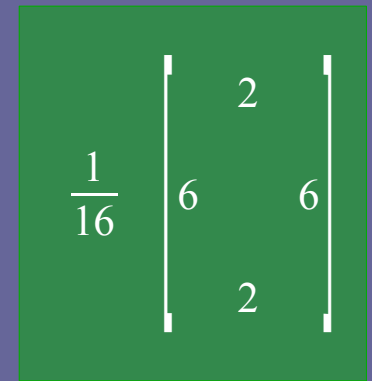
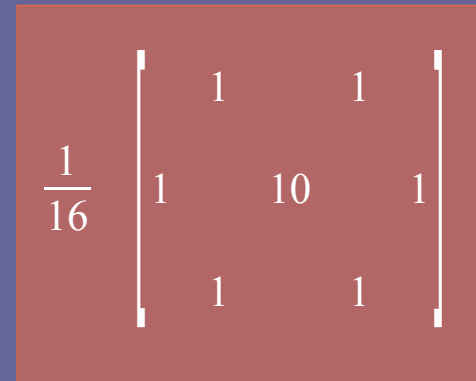
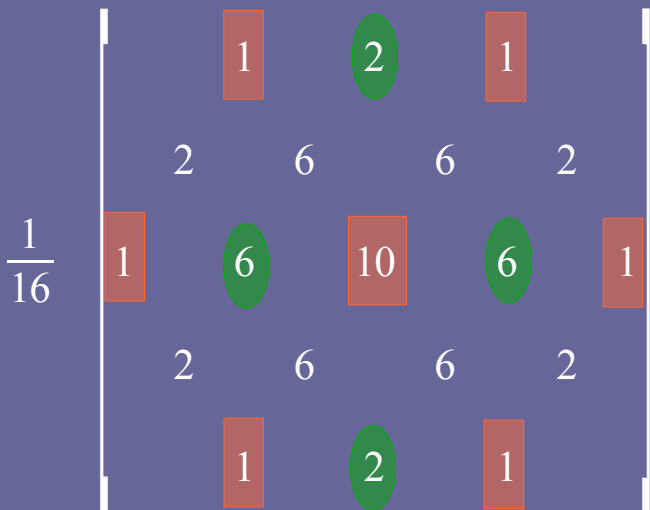
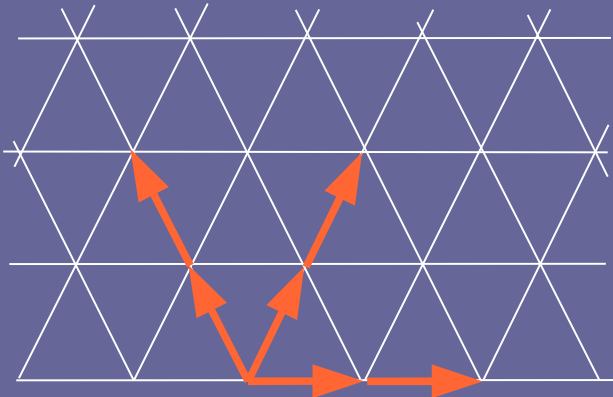
- Box-spline à 6 directions (3×2) :



$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & \\ & 2 & 6 & 6 & 2 & \\ & 1 & 6 & 10 & 6 & 1 \\ & & 2 & 6 & 6 & 2 \\ & & & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

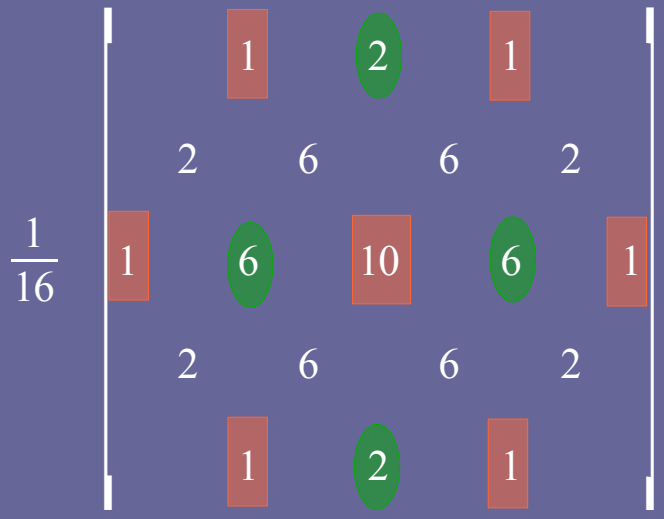
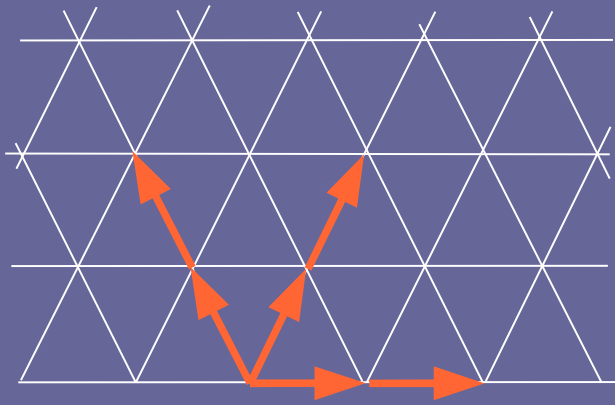
Exemple

- Box-spline à 6 directions (3×2) :



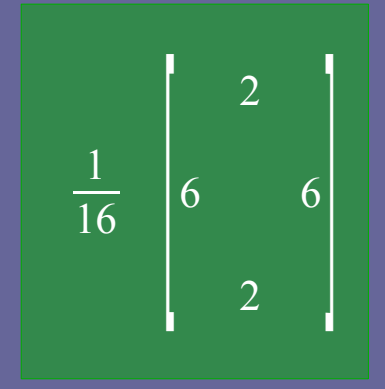
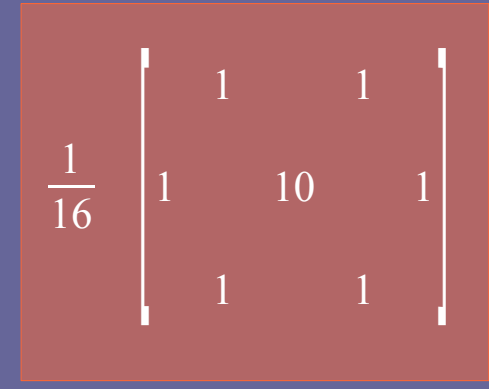
Exemple

- Box-spline à 6 directions (3×2) :



Continuité C^2

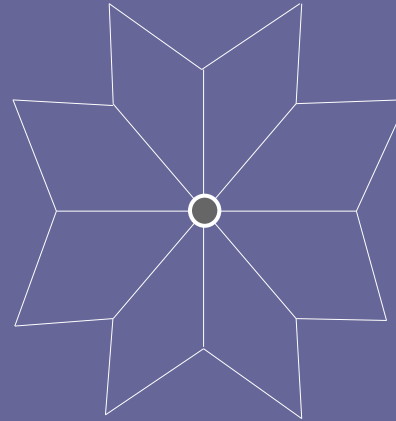
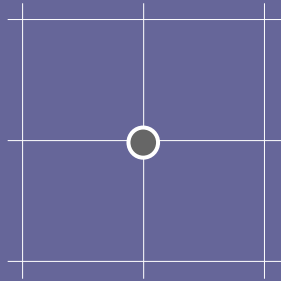
Schéma de Loop [Loo87]



Les sommets irréguliers

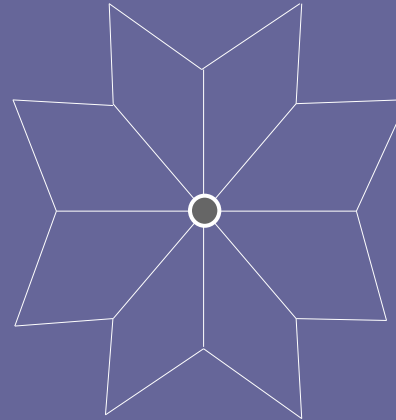
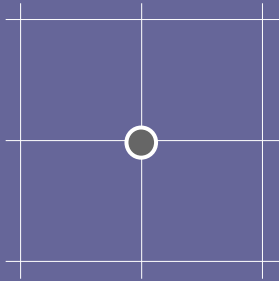
Qu'est-ce qu'un sommet irrégulier ?

- Un sommet de valence différente de 4 sur un maillage de quadrilatères :

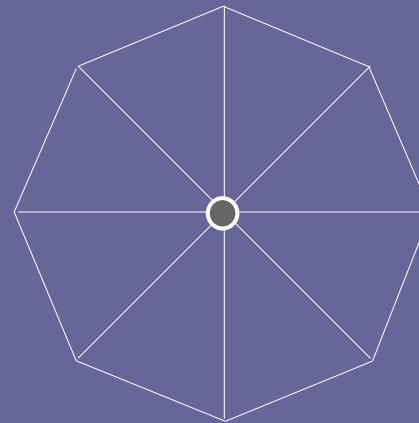
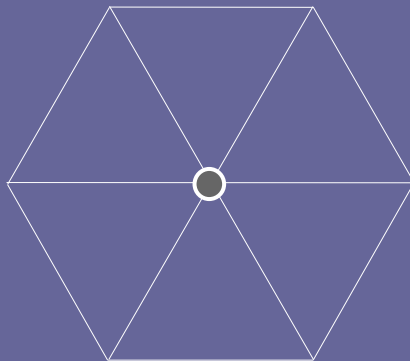


Qu'est-ce qu'un sommet irrégulier ?

- Un sommet de valence différente de 4 sur un maillage de quadrilatères :

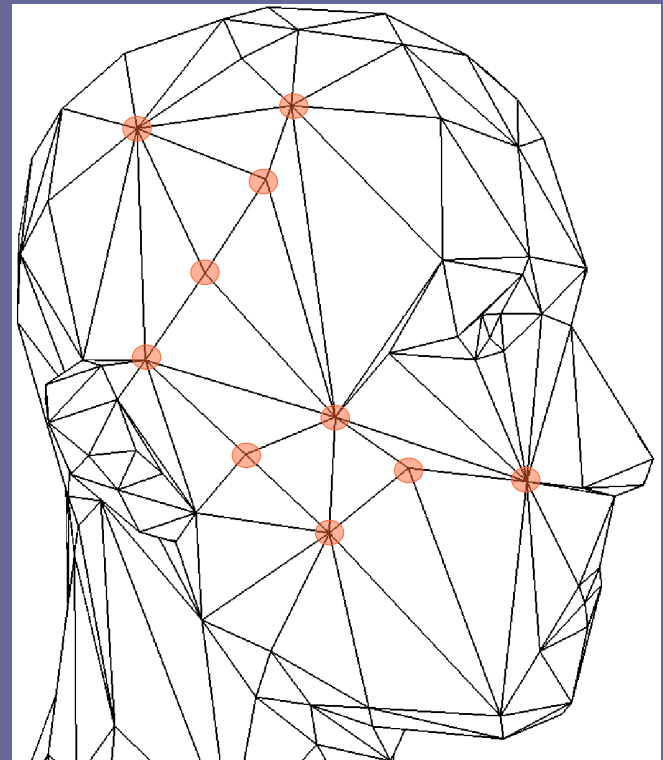
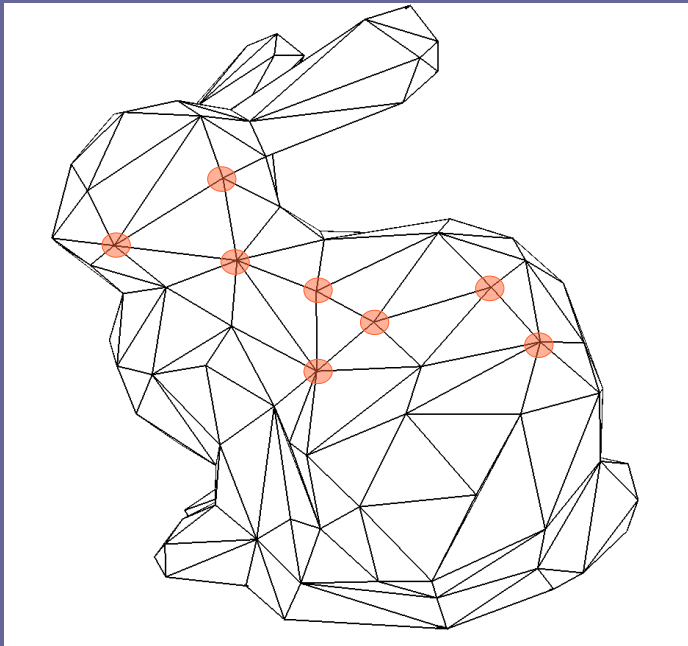


- Un sommet de valence différente de 6 sur un maillage triangulaire :



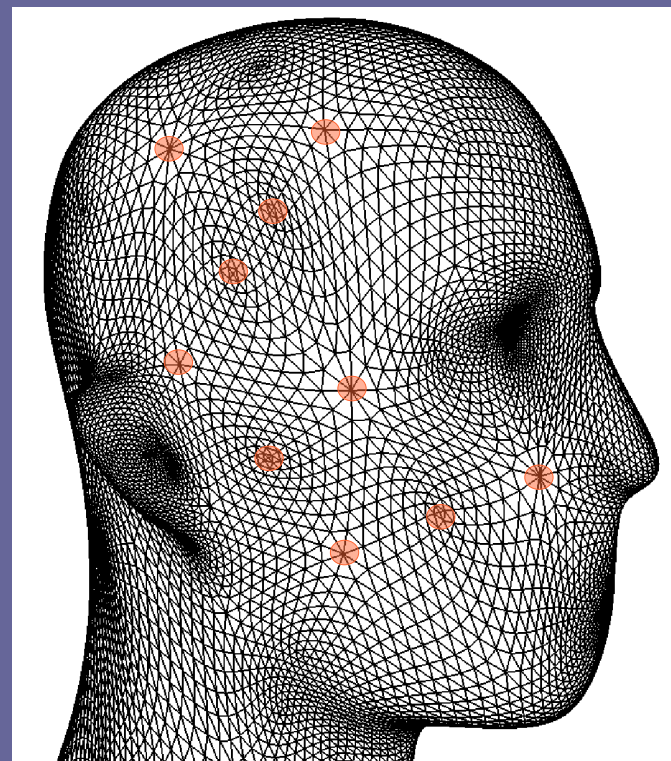
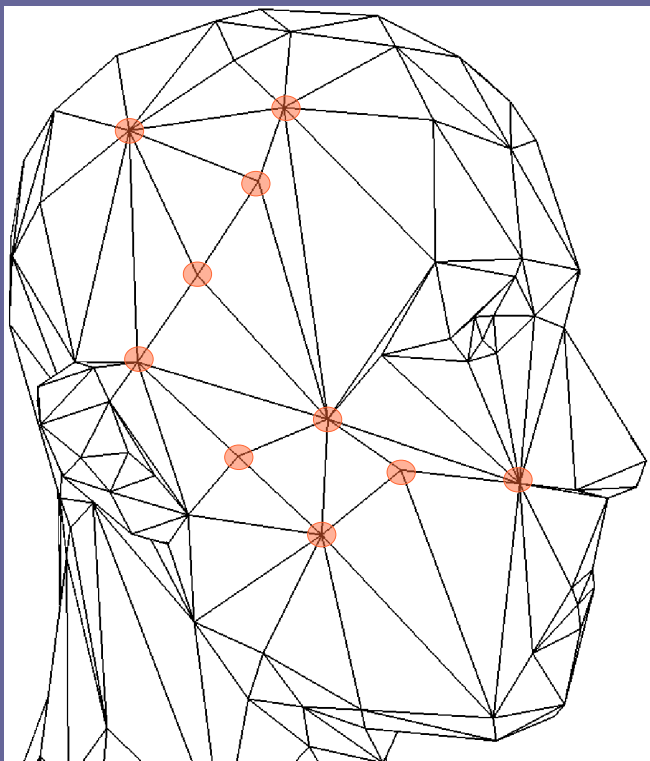
Il y a toujours des sommets irréguliers

- On peut facilement démontrer (formule d'Euler) qu'un objet de génus zéro ne peut pas être mailler avec un maillage triangulaire (ou formé de quadrilatères) entièrement régulier
- Un maillage classique a plutôt l'aspect suivant :



Que ce passe-t-il lors de la subdivision

- La subdivision n'insère que des sommets réguliers
- Après plusieurs pas de subdivision, les sommets irréguliers sont isolés dans une « mer » de sommets réguliers

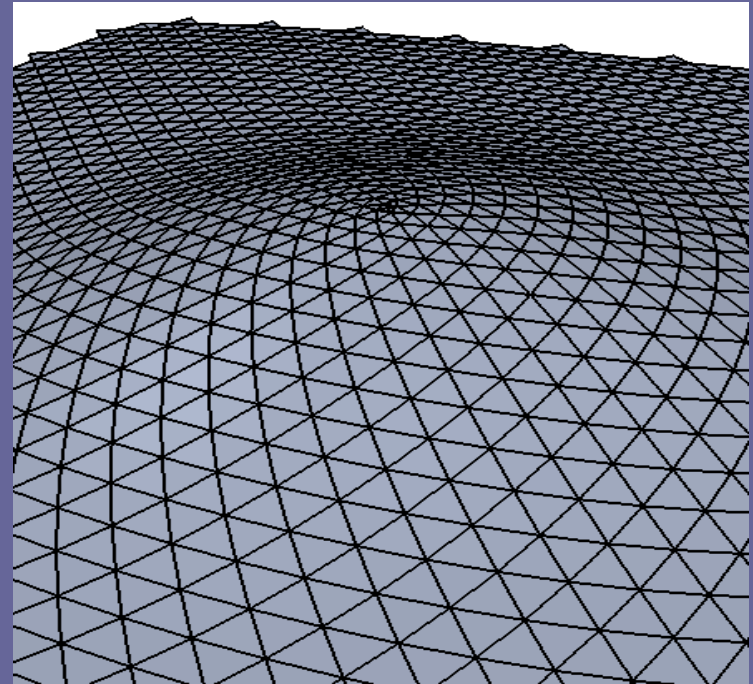
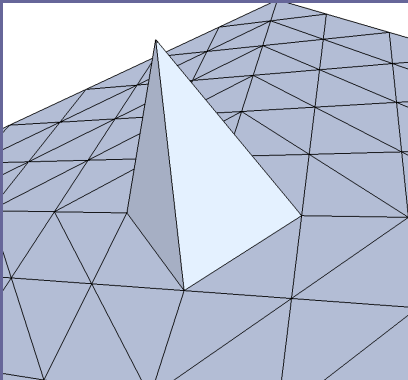


La surface ?

- Au niveau de ces sommets, les règles de subdivisions ne font pas converger le maillage vers une surface à l'équation connue.

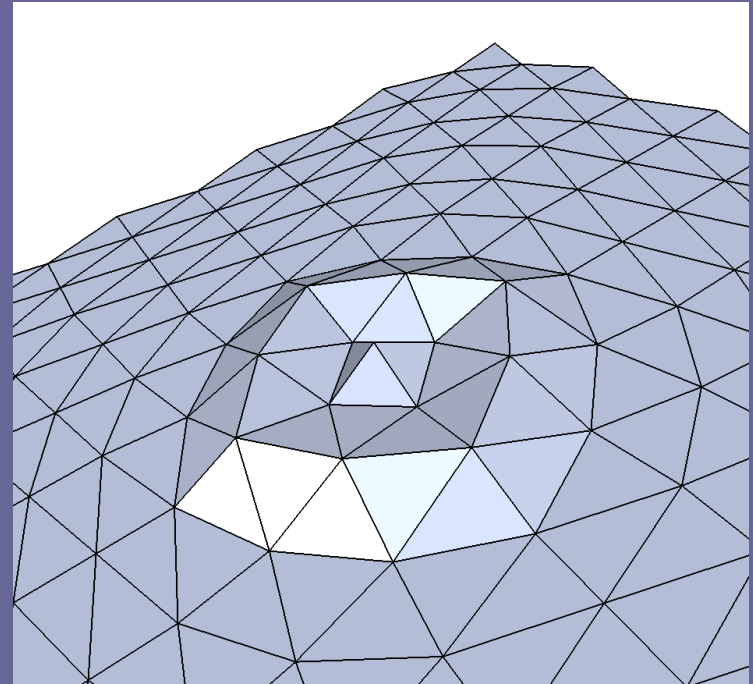
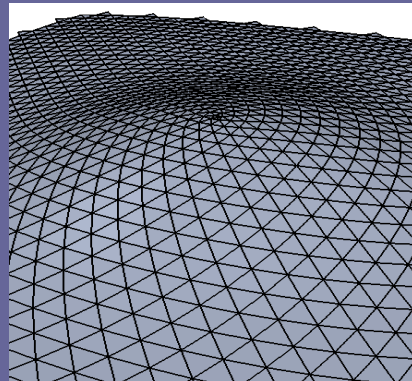
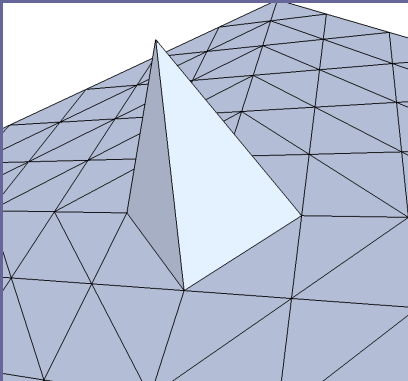
La surface limite ?

- Au niveau de ces sommets, les règles de subdivisions ne font pas converger le maillage vers une surface à l'équation connue.
- Il faut donc proposer des règles qui permettent de converger une surface de la meilleur « **qualité** » possible :
 - Minimiser les oscillations



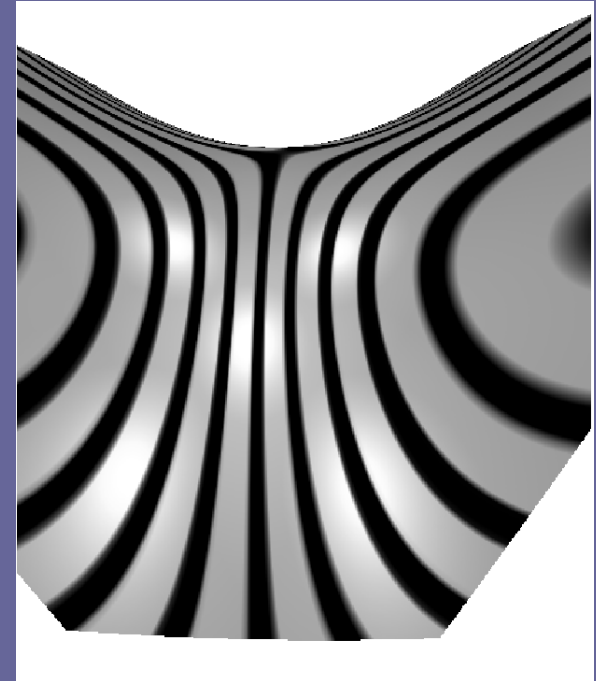
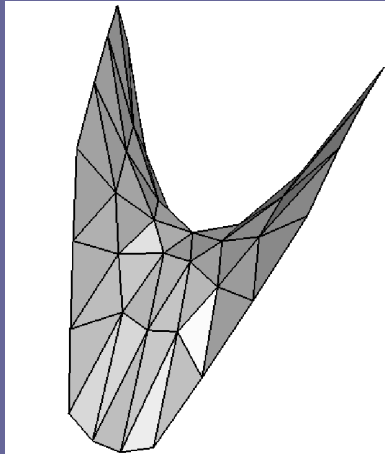
La surface limite ?

- Au niveau de ces sommets, les règles de subdivisions ne font pas converger le maillage vers une surface à l'équation connue.
- Il faut donc proposer des règles qui permettent de converger une surface de la meilleur « **qualité** » possible :
 - Minimiser les oscillations



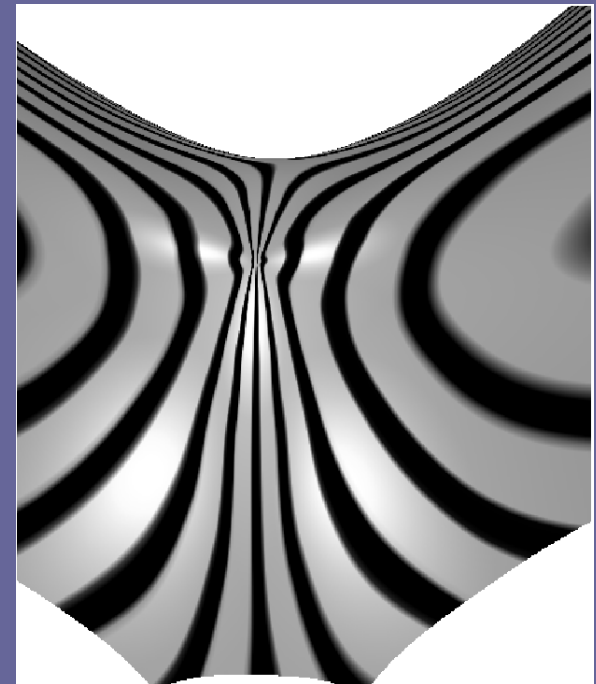
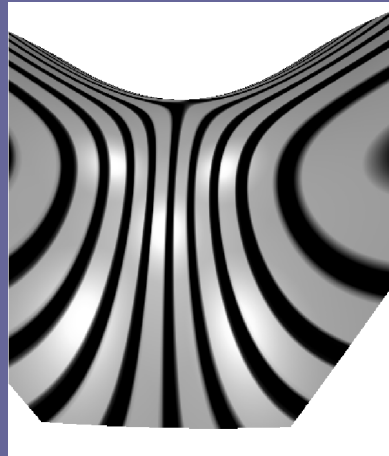
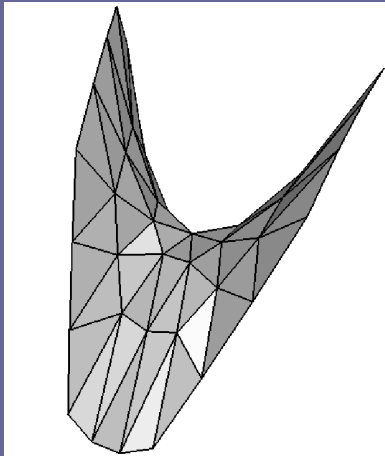
La surface limite ?

- Au niveau de ces sommets, les règles de subdivisions ne font pas converger le maillage vers une surface à l'équation connue.
- Il faut donc proposer des règles qui permettent de converger une surface de la meilleur « **qualité** » possible :
 - Minimiser les oscillations
 - Continuité maximale (si possible C^2)



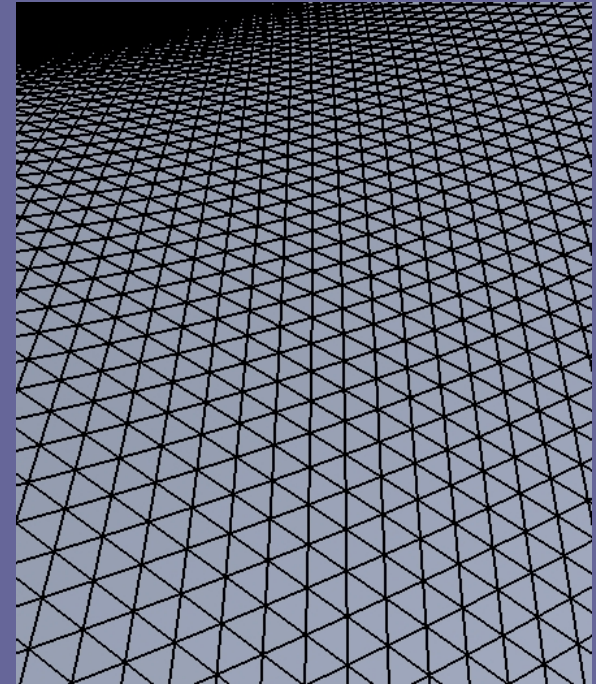
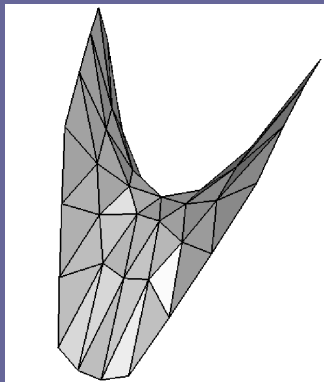
La surface limite ?

- Au niveau de ces sommets, les règles de subdivisions ne font pas converger le maillage vers une surface à l'équation connue.
- Il faut donc proposer des règles qui permettent de converger une surface de la meilleur « **qualité** » possible :
 - Minimiser les oscillations
 - Continuité maximale (si possible C^2)



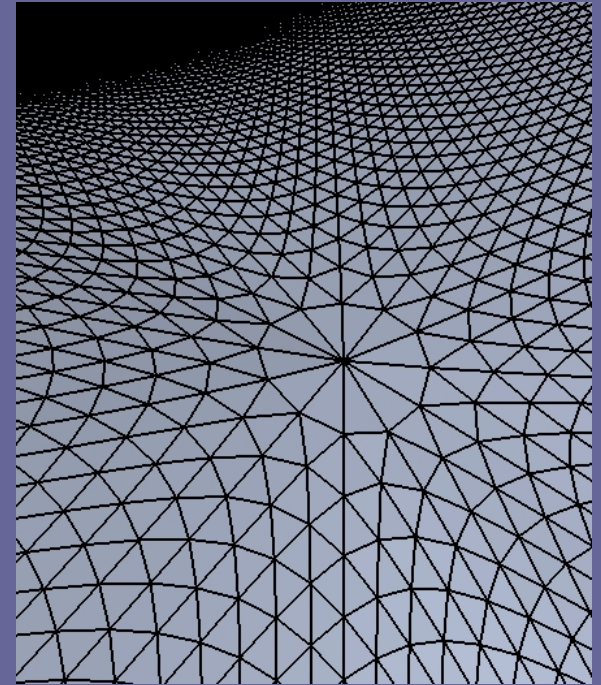
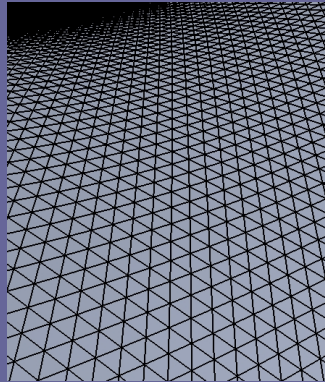
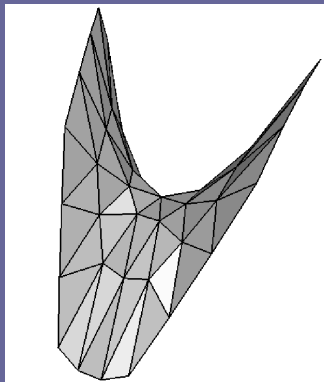
La surface limite ?

- Au niveau de ces sommets, les règles de subdivisions ne font pas converger le maillage vers une surface à l'équation connue.
- Il faut donc proposer des règles qui permettent de converger une surface de la meilleur « **qualité** » possible :
 - Minimiser les oscillations
 - Continuité maximale (si possible C^2)
 - Maillage régulier



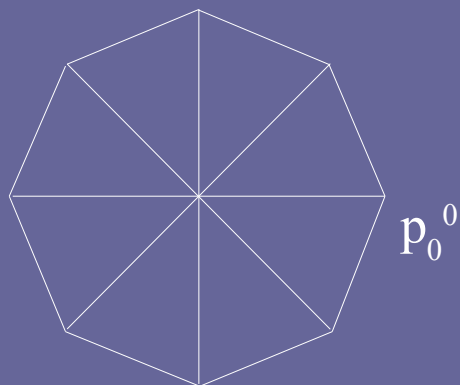
La surface limite ?

- Au niveau de ces sommets, les règles de subdivisions ne font pas converger le maillage vers une surface à l'équation connue.
- Il faut donc proposer des règles qui permettent de converger une surface de la meilleur « **qualité** » possible :
 - Minimiser les oscillations
 - Continuité maximale (si possible C^2)
 - Maillage régulier



Matrice de subdivision

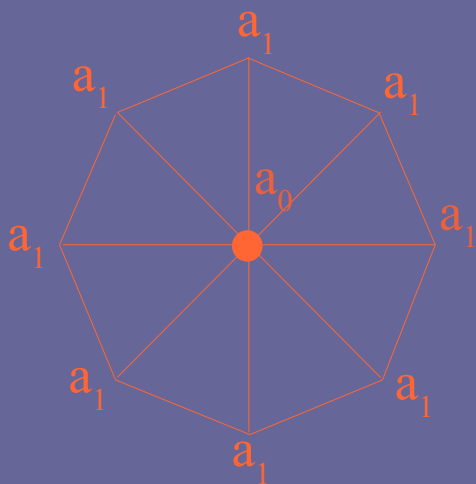
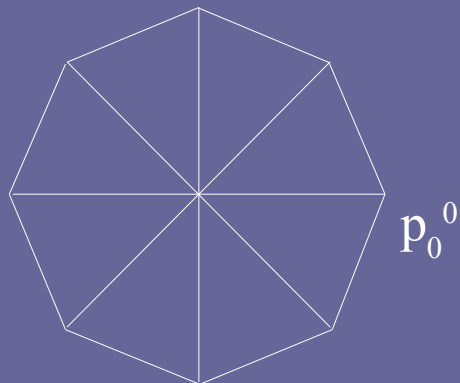
- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{pmatrix} q^1 \\ p_0^1 \\ p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_4^1 \\ p_5^1 \\ p_6^1 \\ p_7^1 \\ p_8^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^0 \\ p_0^0 \\ p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \\ p_7^0 \\ p_8^0 \end{pmatrix}$$

Matrice de subdivision

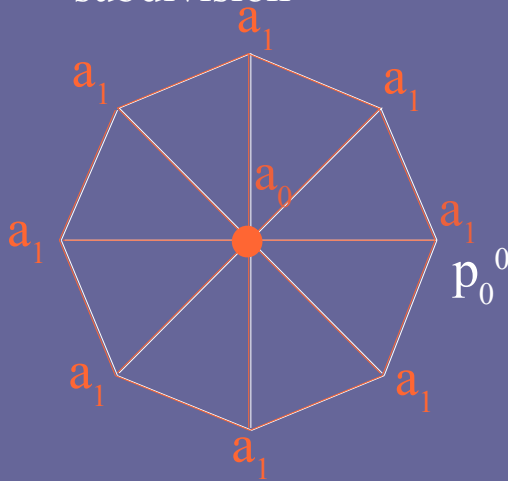
- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{pmatrix} q^1 \\ p_0^1 \\ p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_4^1 \\ p_5^1 \\ p_6^1 \\ p_7^1 \\ p_8^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^0 \\ p_0^0 \\ p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \\ p_7^0 \\ p_8^0 \end{pmatrix}$$

Matrice de subdivision

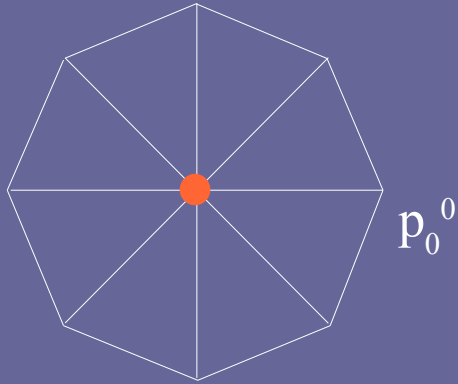
- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{array}{c}
 q^1 \\
 p_0^1 \\
 p_1^1 \\
 p_2^1 \\
 p_3^1 \\
 p_4^1 \\
 p_5^1 \\
 p_6^1 \\
 p_7^1 \\
 p_8^1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccccc}
 a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 q^0 \\
 p_0^0 \\
 p_1^0 \\
 p_2^0 \\
 p_3^0 \\
 p_4^0 \\
 p_5^0 \\
 p_6^0 \\
 p_7^0 \\
 p_8^0
 \end{array}$$

Matrice de subdivision

- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{array}{c} q^1 \\ p_0^1 \\ p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_4^1 \\ p_5^1 \\ p_6^1 \\ p_7^1 \\ p_8^1 \end{array} = \begin{array}{cccccccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \end{array} \begin{array}{c} q^0 \\ p_0^0 \\ p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \\ p_7^0 \\ p_8^0 \end{array}$$

Matrice de subdivision

- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision

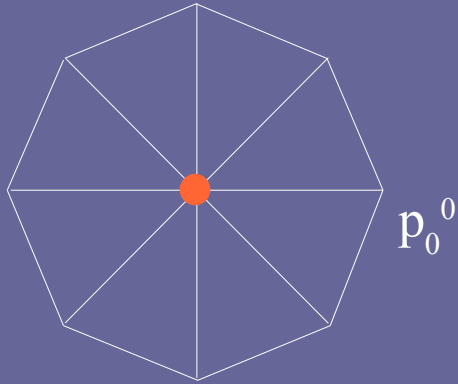
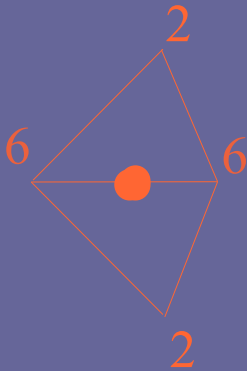


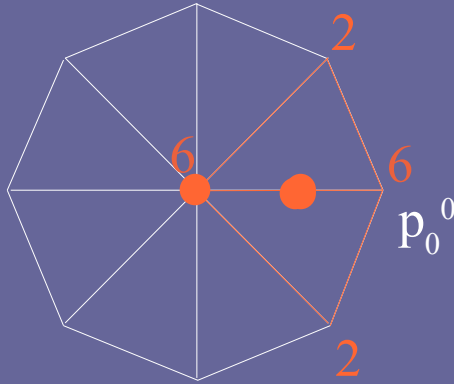
Schéma de Loop :



$$\begin{pmatrix} q^1 \\ p_0^1 \\ p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_4^1 \\ p_5^1 \\ p_6^1 \\ p_7^1 \\ p_8^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^0 \\ p_0^0 \\ p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \\ p_7^0 \\ p_8^0 \end{pmatrix}$$

Matrice de subdivision

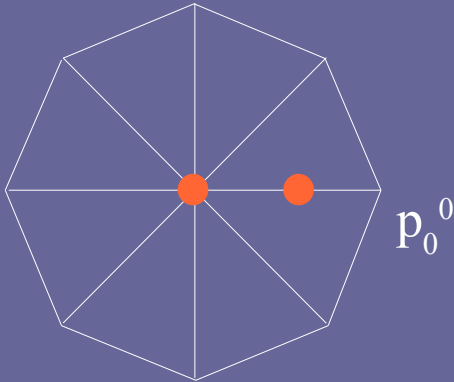
- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{array}{c}
 q^1 \\
 p_0^1 \\
 p_1^1 \\
 p_2^1 \\
 p_3^1 \\
 p_4^1 \\
 p_5^1 \\
 p_6^1 \\
 p_7^1 \\
 p_8^1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccccccc}
 a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\
 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 q^0 \\
 p_0^0 \\
 p_1^0 \\
 p_2^0 \\
 p_3^0 \\
 p_4^0 \\
 p_5^0 \\
 p_6^0 \\
 p_7^0 \\
 p_8^0
 \end{array}$$

Matrice de subdivision

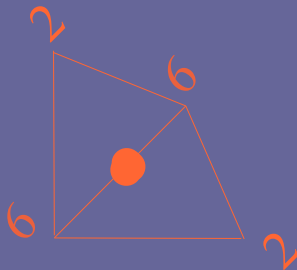
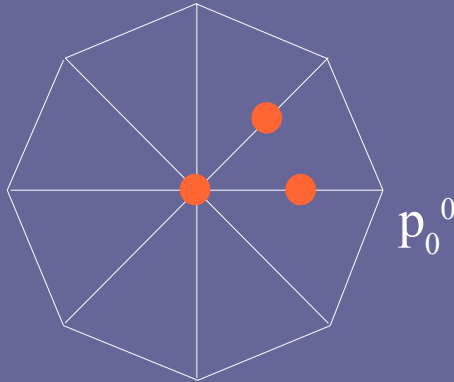
- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{array}{c}
 q^1 \\
 p_0^1 \\
 p_1^1 \\
 p_2^1 \\
 p_3^1 \\
 p_4^1 \\
 p_5^1 \\
 p_6^1 \\
 p_7^1 \\
 p_8^1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccccccc}
 a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\
 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 q^0 \\
 p_0^0 \\
 p_1^0 \\
 p_2^0 \\
 p_3^0 \\
 p_4^0 \\
 p_5^0 \\
 p_6^0 \\
 p_7^0 \\
 p_8^0
 \end{array}$$

Matrice de subdivision

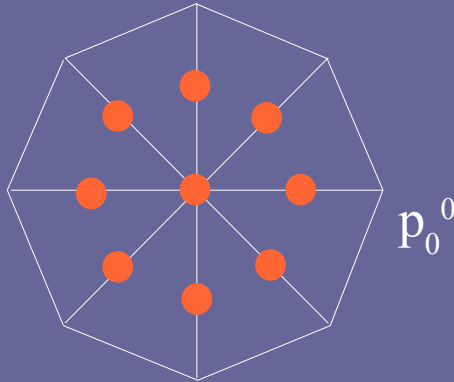
- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{array}{c}
 q^1 \\
 p_0^1 \\
 p_1^1 \\
 p_2^1 \\
 p_3^1 \\
 p_4^1 \\
 p_5^1 \\
 p_6^1 \\
 p_7^1 \\
 p_8^1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 a_0 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \\
 6 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \\
 6 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 q^0 \\
 p_0^0 \\
 p_1^0 \\
 p_2^0 \\
 p_3^0 \\
 p_4^0 \\
 p_5^0 \\
 p_6^0 \\
 p_7^0 \\
 p_8^0
 \end{array}$$

Matrice de subdivision

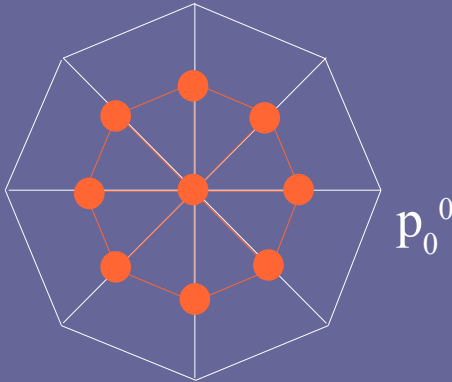
- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{array}{c} q^1 \\ p_0^1 \\ p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_4^1 \\ p_5^1 \\ p_6^1 \\ p_7^1 \\ p_8^1 \end{array} = \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{array} \begin{array}{cccccccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \begin{array}{c} q^0 \\ p_0^0 \\ p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \\ p_7^0 \\ p_8^0 \end{array}$$

Matrice de subdivision

- L'étude de la surface au voisinage des sommets irréguliers s'appuie sur la matrice de subdivision



$$\begin{array}{c}
 q^1 \\
 p_0^1 \\
 p_1^1 \\
 p_2^1 \\
 p_3^1 \\
 p_4^1 \\
 p_5^1 \\
 p_6^1 \\
 p_7^1 \\
 p_8^1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 a_0 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \\
 6 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \\
 6 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 6 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 6 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\
 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \\
 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \\
 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 q^0 \\
 p_0^0 \\
 p_1^0 \\
 p_2^0 \\
 p_3^0 \\
 p_4^0 \\
 p_5^0 \\
 p_6^0 \\
 p_7^0 \\
 p_8^0
 \end{array}$$

$$P^1 = S P^0$$

Décomposition en valeurs et vecteurs propres

- Pour étudier le comportement de la surface limite, on décompose la matrice de subdivision S en vecteurs et valeurs propres :

$$S = M \Lambda M^{-1}$$

soit

$$S = \begin{bmatrix} | & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ | & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & & & & & \\ \lambda_0 & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \lambda_2 & & & & \\ & & & \lambda_3 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \lambda_4 & \\ & & & & 0 & & \lambda_5 \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \dots \\ | & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & & & & & \\ \dots & n_0 & \dots & & & & \\ \dots & n_1 & \dots & & & & \\ \dots & n_2 & \dots & & & & \\ \dots & n_3 & \dots & & & & \\ \dots & n_4 & \dots & & & & \\ \dots & n_5 & \dots & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ | & & & & & & \end{bmatrix}$$

Que ce passe-t-il au cours de la subdivision ?

- Après r pas de subdivision :

$$\begin{aligned}P^r &= S^r P^0 \\&= M \wedge M^{-1} M \wedge M^{-1} \dots M \wedge M^{-1} P^0 \\&= M \wedge^r M^{-1} P^0 \\&= M \wedge^r L \quad \text{où} \quad L = M^{-1} P^0\end{aligned}$$

- C'est à dire :

$$P^r = m_0 \lambda_0^r l_0 + m_1 \lambda_1^r l_1 + m_2 \lambda_2^r l_2 + m_3 \lambda_3^r l_3 + m_4 \lambda_4^r l_4 + m_5 \lambda_5^r l_5 + \dots$$

Interprétation en série de Taylor

- Quand les valeurs propres sont ordonnées de la plus grande à la plus petite :

$$1 = \lambda_0 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq |\lambda_5| \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots$$

Interprétation en série de Taylor

- Quand les valeurs propres sont ordonnées de la plus grande à la plus petite :

$$1 = \lambda_0 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq |\lambda_5| \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots$$

- Cette expression peut s'interpréter comme un développement en séries de Taylor au point irrégulier :

$$f(x, y) = f + x f_x + y f_y + \frac{x^2}{2} f_{xx} + \frac{y^2}{2} f_{yy} + xy f_{xy} + \dots$$

Interprétation en série de Taylor

- Quand les valeurs propres sont ordonnées de la plus grande à la plus petite :

$$1 = \lambda_0 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq |\lambda_5| \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots$$

- Cette expression peut s'interpréter comme un développement en séries de Taylor au point irrégulier :

$$f(x, y) = f + x f_x + y f_y + \frac{x^2}{2} f_{xx} + \frac{y^2}{2} f_{yy} + xy f_{xy} + \dots$$

- Qui s'écrit aussi :

$$f(x, y) = f + x f_x + y f_y + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right)(f_{xx} + f_{yy}) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)(f_{xx} - f_{yy}) + xy f_{xy} + \dots$$

Interprétation en série de Taylor

- Ainsi :

$$P^r = m_0 \lambda_0^r l_0 + m_1 \lambda_1^r l_1 + m_2 \lambda_2^r l_2 + m_3 \lambda_3^r l_3 + m_4 \lambda_4^r l_4 + m_5 \lambda_5^r l_5 + \dots$$

$$f(x, y) = f + x f_x + y f_y + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right)(f_{xx} + f_{yy}) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)(f_{xx} - f_{yy}) + xy f_{xy} + \dots$$

- Les l_i sont les dérivées partielles successives :
 - l_0 est la position du point central à la limite
 - l_1 et l_2 sont les dérivées partielles de premier ordre (tangentes à la surface en l_0)
 - ...

Interprétation en série de Taylor

- Ainsi :

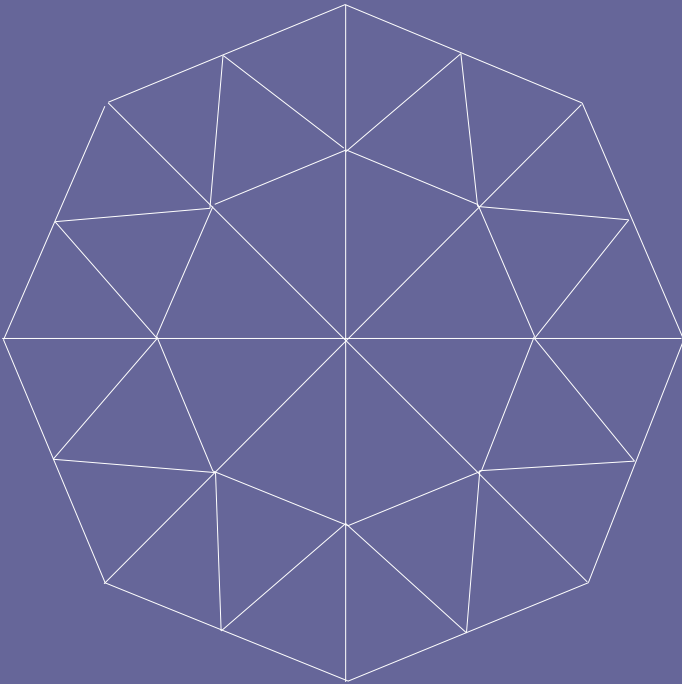
$$P^r = m_0 \lambda_0^r l_0 + m_1 \lambda_1^r l_1 + m_2 \lambda_2^r l_2 + m_3 \lambda_3^r l_3 + m_4 \lambda_4^r l_4 + m_5 \lambda_5^r l_5 + \dots$$

$$f(x, y) = f + x f_x + y f_y + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right)(f_{xx} + f_{yy}) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)(f_{xx} - f_{yy}) + xy f_{xy} + \dots$$

- Les l_i sont les dérivées partielles successives :
 - l_0 est la position du point central à la limite
 - l_1 et l_2 sont les dérivées partielles de premier ordre (tangentes à la surface en l_0)
 - ...
- Les m_i correspondent aux différentes fonctions polynomiales représentée à une échelle donnée par le facteur d'échelle λ_i
 - $m_0 = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$ pour la position du point central à la limite

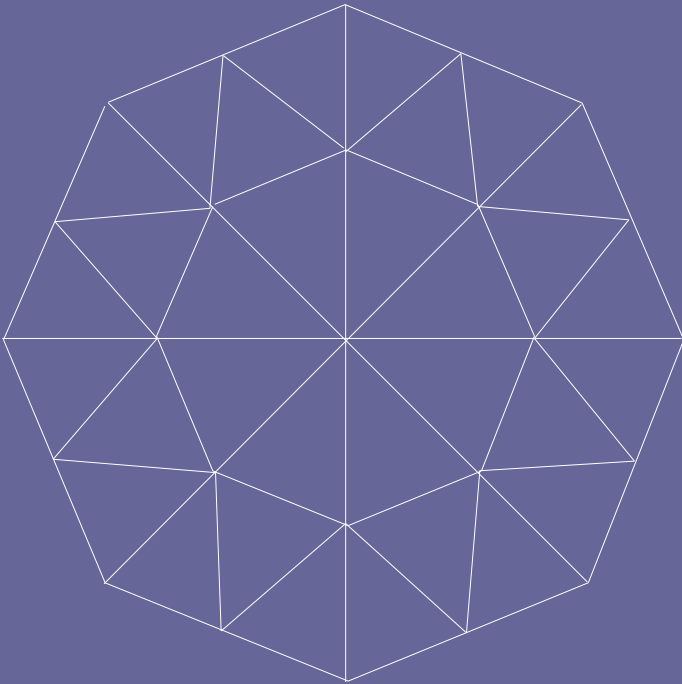
Interprétation géométrique

- Etudions un voisinage un peu plus grand (matrice de subdivision plus grande) :



Interprétation géométrique

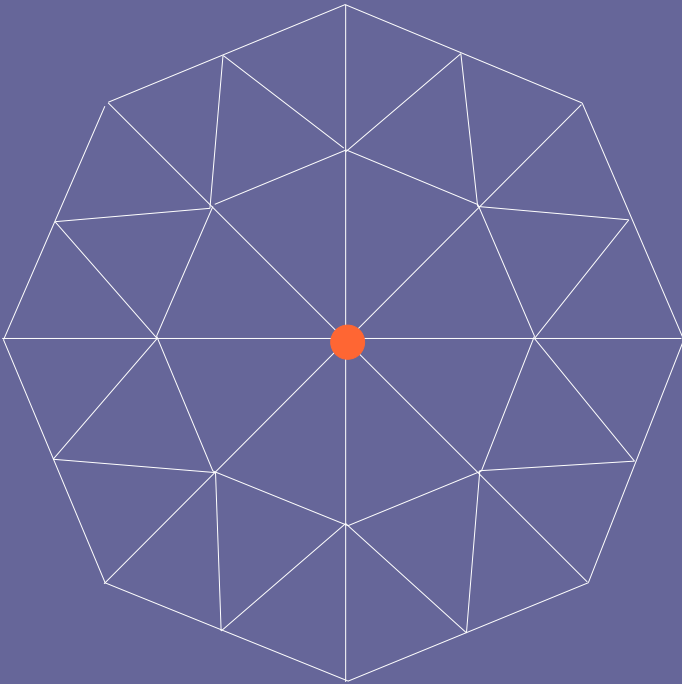
- Etudions un voisinage un peu plus grand (matrice de subdivision plus grande) :



- Les vecteurs propres m_1 et m_2 donnent respectivement les abscisses et les ordonnées de la position des points à la limite dans le **plan tangent**

Interprétation géométrique

- Etudions un voisinage un peu plus grand (matrice de subdivision plus grande) :

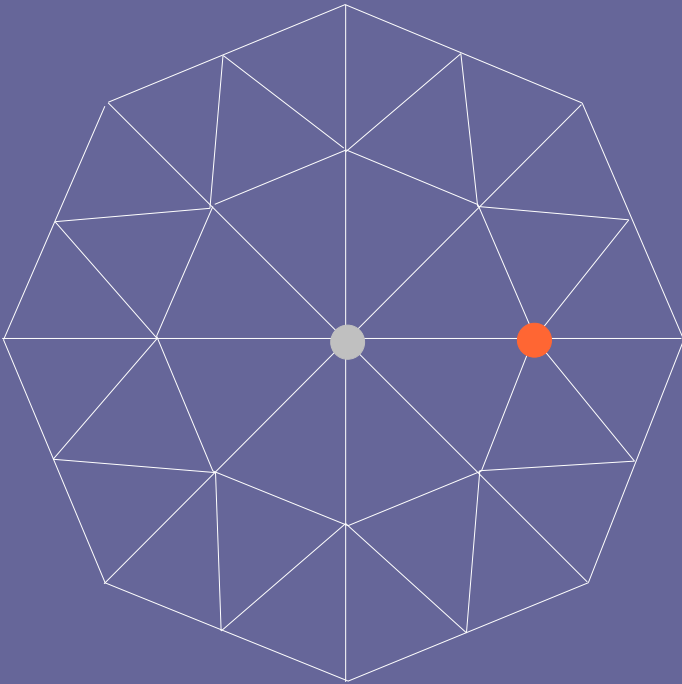


- Les vecteurs propres m_1 et m_2 donnent respectivement les abscisses et les ordonnées de la position des points à la limite dans le **plan tangent**

$$(m_1^0, m_2^0)$$

Interprétation géométrique

- Etudions un voisinage un peu plus grand (matrice de subdivision plus grande) :



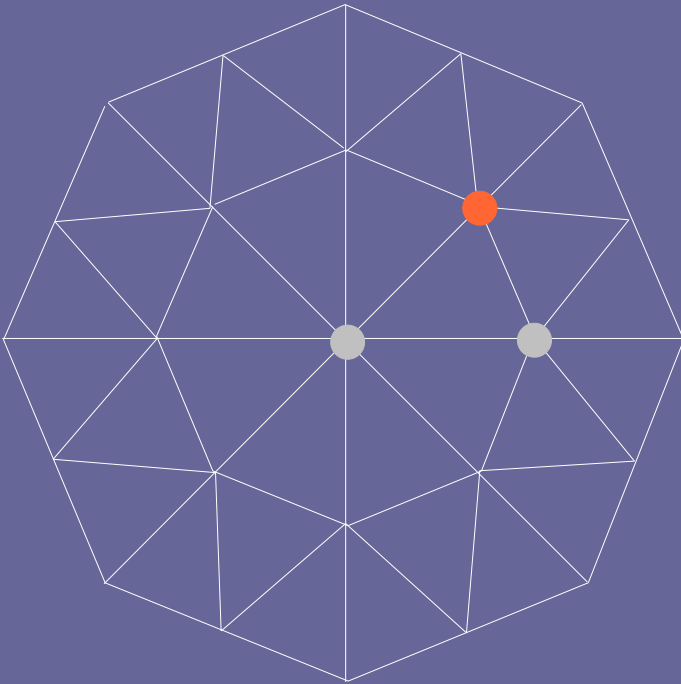
- Les vecteurs propres m_1 et m_2 donnent respectivement les abscisses et les ordonnées de la position des points à la limite dans le **plan tangent**

$$\begin{pmatrix} m_1^0 \\ m_2^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1^1 \\ m_2^1 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique

- Etudions un voisinage un peu plus grand (matrice de subdivision plus grande) :



- Les vecteurs propres m_1 et m_2 donnent respectivement les abscisses et les ordonnées de la position des points à la limite dans le **plan tangent**

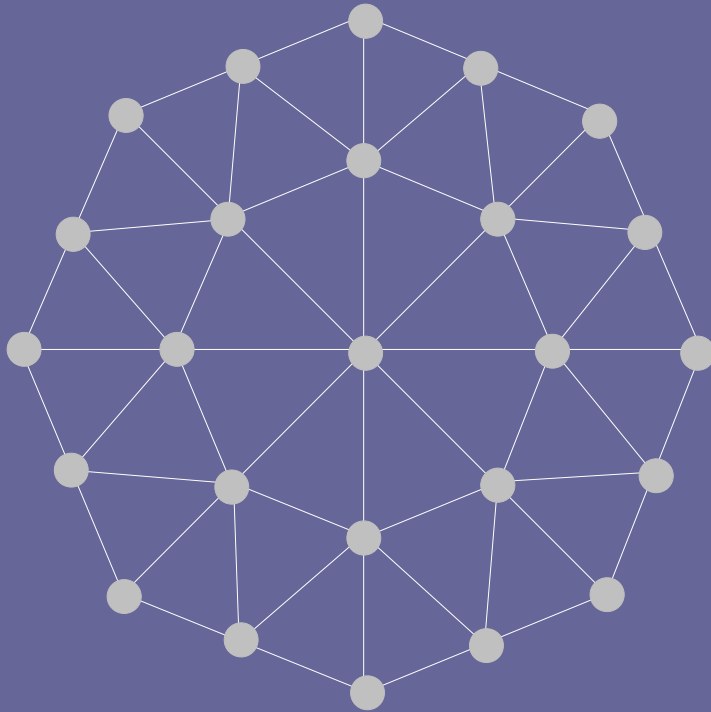
$$\begin{pmatrix} m_1^0 \\ m_2^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1^1 \\ m_2^1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1^2 \\ m_2^2 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique

- Etudions un voisinage un peu plus grand (matrice de subdivision plus grande) :



- Les vecteurs propres m_1 et m_2 donnent respectivement les abscisses et les ordonnées de la position des points à la limite dans le **plan tangent**

$$\begin{pmatrix} m_1^0 \\ m_2^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1^1 \\ m_2^1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1^2 \\ m_2^2 \end{pmatrix}$$

⋮

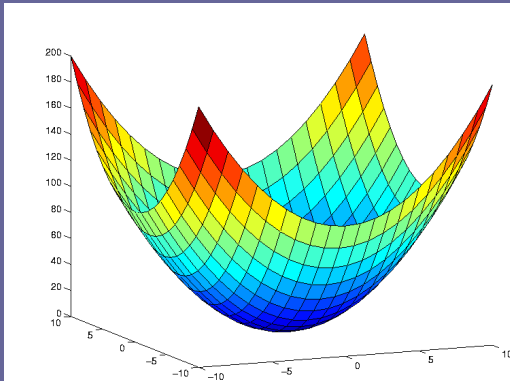
Interprétation géométrique

- Les valeurs propres λ_1 , λ_2 et les vecteurs propres m_1 , m_2 permettent d'étudier le comportement de la surface limite dans le plan tangent

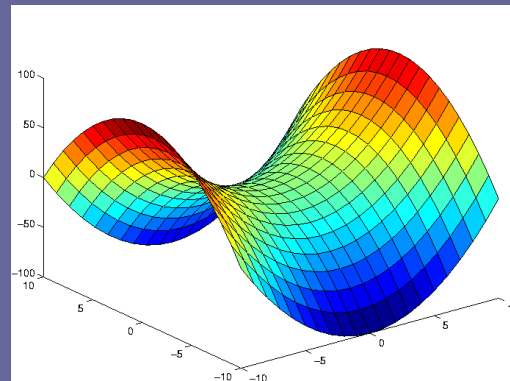
Interprétation géométrique

- Polynômes de degré 2 : Contrôle de la **courbure**

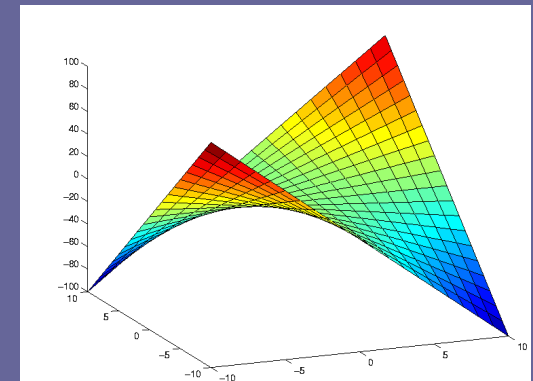
$$f(x, y) = f + x f_x + y f_y + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right)(f_{xx} + f_{yy}) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)(f_{xx} - f_{yy}) + xy f_{xy} + \dots$$



Coupe



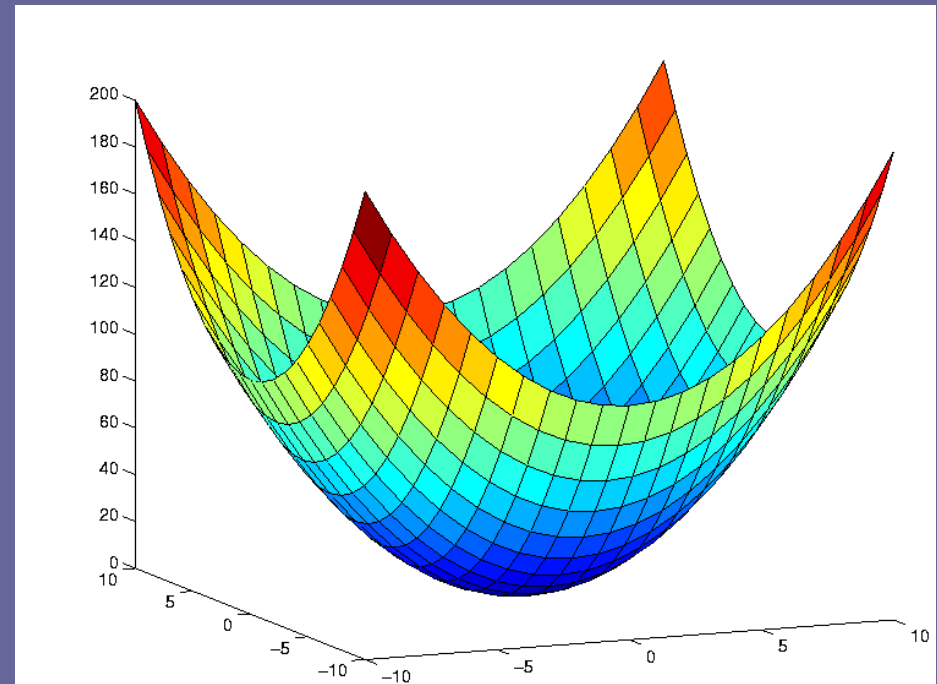
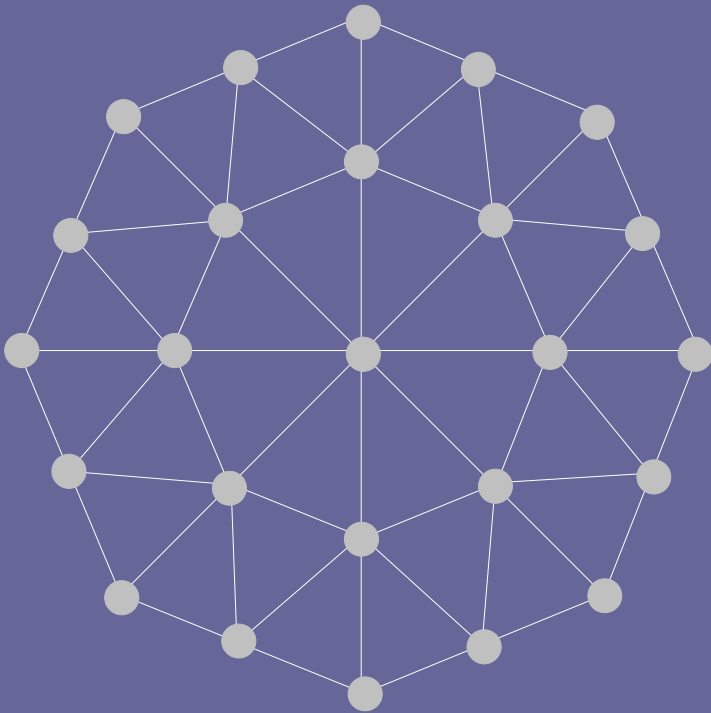
Selle



Selle

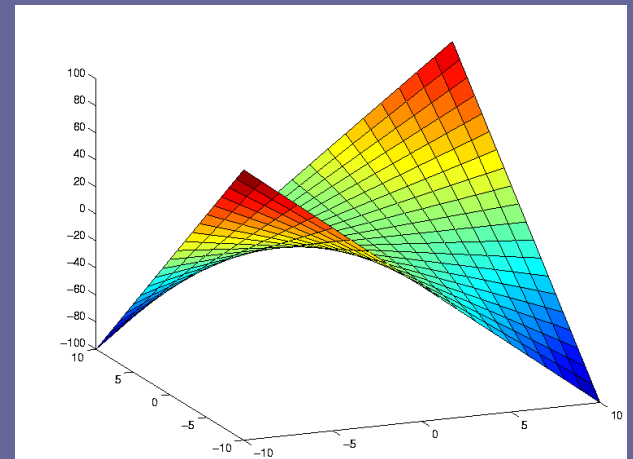
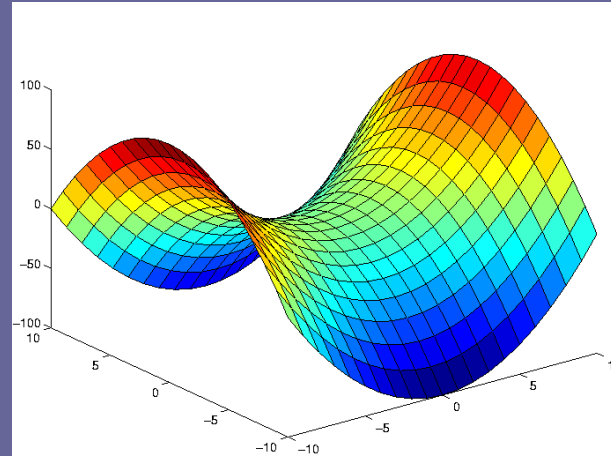
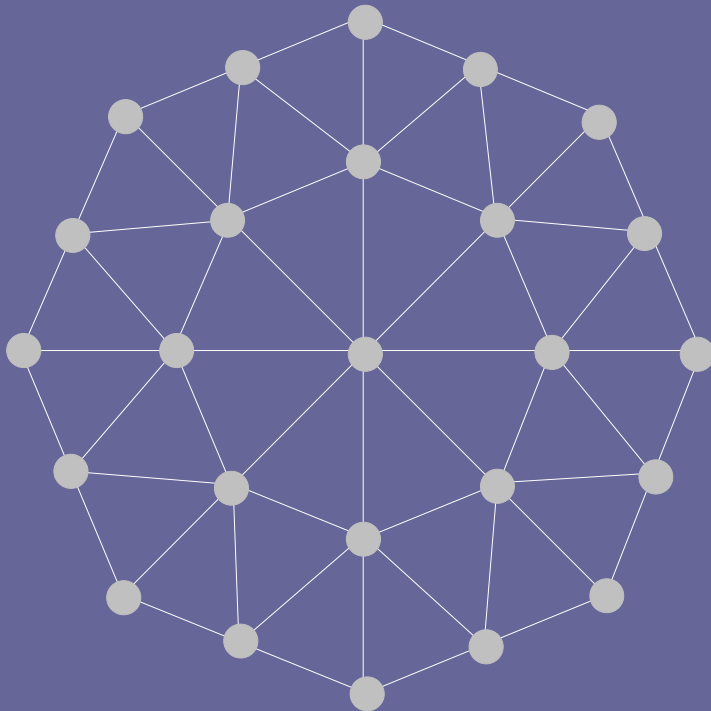
Interprétation géométrique

- Le vecteur propre m_3 donne les altitudes des sommets du plan tangent dans la configuration de coupe



Interprétation géométrique

- Les vecteurs propres m_4 et m_5 donnent les altitudes des sommets du plan tangent dans chacune des configurations en selle



Interprétation géométrique

- Les valeurs propres λ_3 , λ_4 , λ_5 et les vecteurs propres m_3 , m_4 , m_5 permettent d'étudier le comportement de la courbure de la surface limite
 - En fonction d'une configuration **elliptique** (coupe, indices 3) et de deux configurations **hyperboliques** (selles, indices 4 et 5)

Calcul des valeurs et vecteurs propres

La taille de la matrice de subdivision dépend de la valence v du sommet irrégulier

\Rightarrow

Il faut faire un calcul différent pour étudier chaque valence

Calcul des valeurs et vecteurs propres

Structure de la matrice de subdivision :
matrice à blocs circulant

$$S = \begin{array}{c|cccccccc|} & a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \\ \hline 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$S = \begin{array}{c|ccc|} & & & & \\ \hline & \blacksquare & \dots & \blacksquare & \\ \hline & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \hline & \blacksquare & \dots & \blacksquare & \\ \hline \end{array}$$

Calcul des valeurs et vecteurs propres

On utilise la transformée de Fourier pour transformer la matrice S en une matrice diagonale par blocs :

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \color{red}{\square} & \dots & \color{red}{\square} \\ \hline & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline & \color{red}{\square} & \dots & \color{red}{\square} \\ \hline \end{array} \longrightarrow \tilde{S} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & \color{red}{\tilde{S}_0} & & 0 \\ \hline & & \color{red}{\tilde{S}_1} & \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & 0 & & \color{red}{\tilde{S}_{v-1}} \\ \hline \end{array}$$

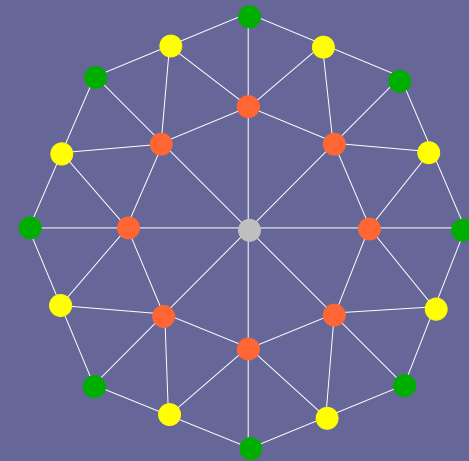
[BGD05]

Calcul des valeurs et vecteurs propres

On utilise la transformée de Fourier pour transformer la matrice S en une matrice diagonale par blocs :

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \text{■} & \dots & \text{■} \\ \hline & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline & \text{■} & \dots & \text{■} \\ \hline \end{array} \longrightarrow \tilde{S} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & \tilde{S}_0 & & 0 \\ \hline & & \tilde{S}_1 & \\ \hline & 0 & & \dots \\ \hline & & & \tilde{S}_{v-1} \\ \hline \end{array}$$

La taille des blocs est égal au nombre d'anneaux pris en compte autour du sommet irrégulier (ici : 3)



[BGD05]

Calcul des valeurs et vecteurs propres

- La taille des blocs est indépendante de la valence du sommet irrégulier
=> Un unique calcul pour toutes les valences
- Les valeurs propres et vecteurs propres des différents blocs de Fourier \tilde{S}_ω donnent les modules des valeurs et vecteurs propres de S, ce qui est suffisant pour l'analyse du schéma

Conditions sur les valeurs propres

- Conditions nécessaires
 - Convergence (condition nécessaire et suffisante)

$$1 = \lambda_0 > \dots > |\lambda_i| > \dots \quad i > 0$$

[BS88] [DS78]

Conditions sur les valeurs propres

- Conditions nécessaires

- Convergence (condition nécessaire et suffisante)

$$1 = \lambda_0 > \dots > |\lambda_i| > \dots \quad i > 0$$

- Continuité C^1

- Les valeurs propres λ_1 et λ_2 doivent venir des blocs de fréquence $\omega = 1$ et $\omega = -1$ et

$$1 = \lambda_0 > |\lambda_1| = |\lambda_2| > \dots > |\lambda_i| > \dots \quad i > 2$$

[BS88] [DS78]

Conditions sur les valeurs propres

- Conditions nécessaires

- Convergence (condition nécessaire et suffisante)

$$1 = \lambda_0 > \dots > |\lambda_i| > \dots \quad i > 0$$

- Continuité C^1

- Les valeurs propres λ_1 et λ_2 doivent venir des blocs de fréquence $\omega = 1$ et $\omega = -1$ et

$$1 = \lambda_0 > |\lambda_1| = |\lambda_2| > \dots > |\lambda_i| > \dots \quad i > 2$$

- Continuité C^2

- La valeur propre λ_3 doit venir du bloc de fréquence $\omega = 0$ et
- les valeurs propres λ_4 et λ_5 doivent venir des blocs de fréquence $\omega = 2$ et $\omega = -2$ et

$$|\lambda_1|^2 \geq \max(|\lambda_3|, |\lambda_4|, |\lambda_5|) \geq \min(|\lambda_3|, |\lambda_4|, |\lambda_5|) > \dots > |\lambda_i| > \dots \quad i > 5$$

[BS88] [DS78]

Courbure bornée

- A noter dans le cas où les conditions nécessaires de continuité C^2 sont satisfaites :

- la courbure est **bornée** si

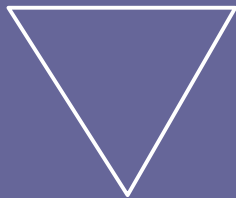
$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_3| = |\lambda_4| = |\lambda_5|$$

- Sinon la courbure est nulle et la surface limite fait un « plat » au niveau du sommet irrégulier

[BS88]

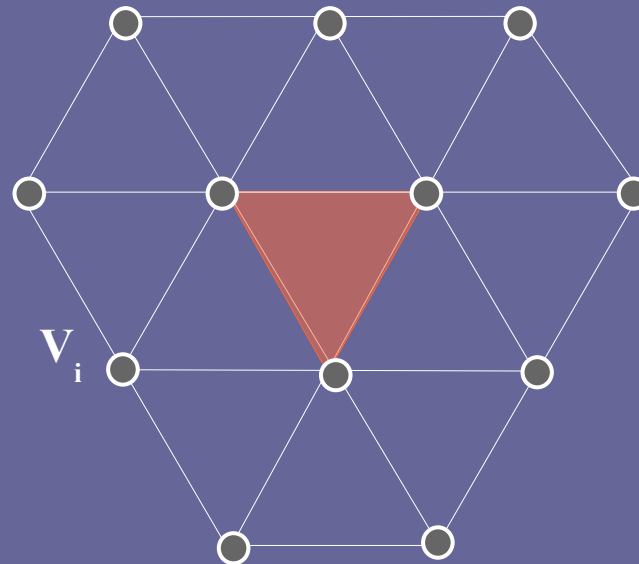
Carte caractéristique

- La carte caractéristique est un anneau de surface régulière défini à partir des vecteurs propres m_1 et m_2 (position des points dans le plan tangent) :
 - On part d'un morceau régulier de surface triangulaire (ici, Box-spline C^2 à 6 directions : Loop 1987)



Domaine :
 $u \in [0,1], v \in [0,1]$

$$C(u, v) = \sum_{i=0}^n b_i(u, v) V_i$$

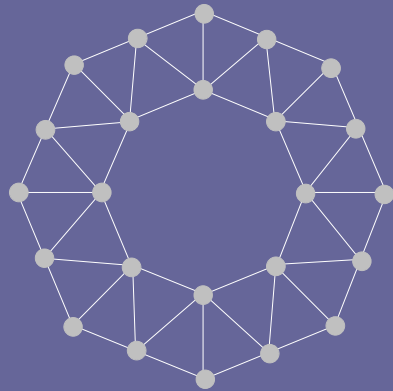


**Carreau de surface
et
son polygone de contrle**

[Rei95]

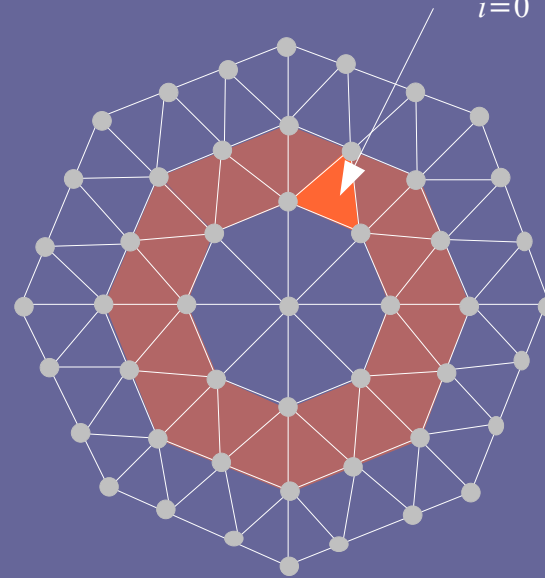
Carte caractéristique

- On considère des anneaux autour du sommet irrégulier pour avoir suffisamment de points de contrôle V_i de coordonnées (m_1^i, m_2^i) pour construire une bande de surface régulière :



Domaine

$$C(u, v, j) = \sum_{i=0}^n b_i(u, v, j) V_i$$



- Au cours des subdivisions, cet anneau converge vers le sommet irrégulier, décrivant ainsi la convergence de la surface limite dans le plan tangent

[Rei95]

Conditions suffisantes de Continuité C^1

- La surface limite est de continuité C^1 au sommet irrégulier si :
 - Les conditions nécessaires sur les valeurs propres sont satisfaites
 - La carte caractéristique est régulière et injective :

$$\frac{\partial C}{\partial v} > 0$$

- Garanti que la surface ne se recouvre pas

[Pra98] [PR98] [Rei95] [Zor00]

D'autres conditions

- Il existe d'autres conditions nécessaires pour qu'un schéma soit de continuité C^2
 - Par exemple, la précision quadratique :

[GBD05]

$$m_3 = m_4 = m_5 = m_1^2$$

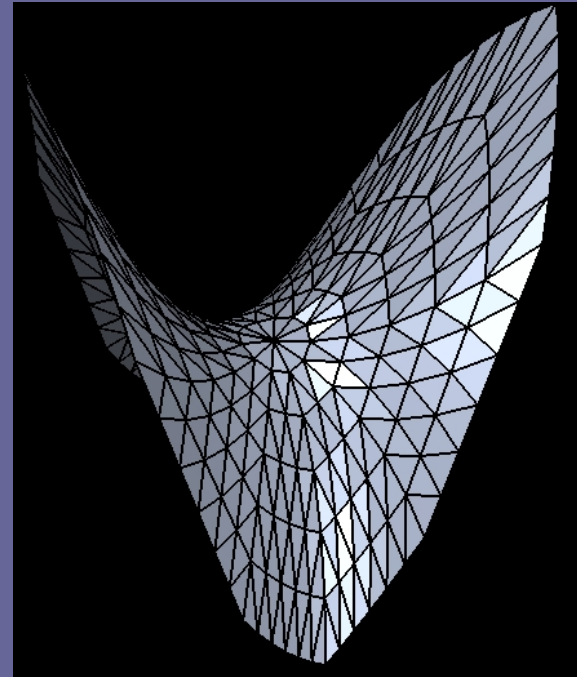
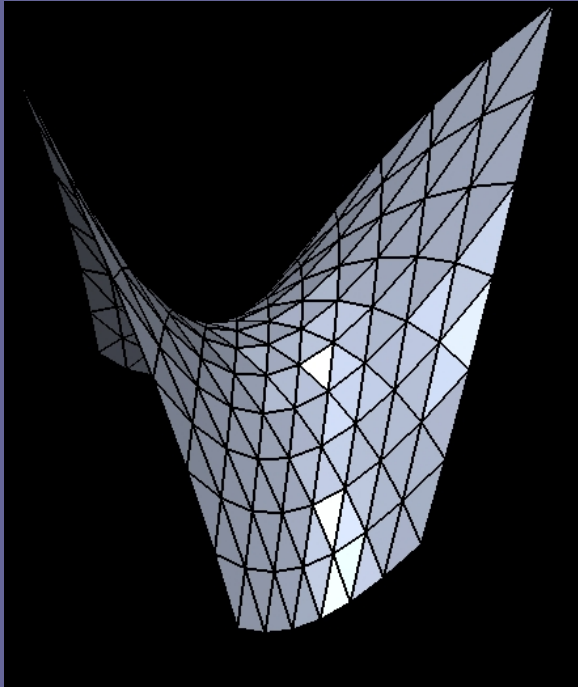
Schémas traditionnels aux sommets irréguliers

- Sous leur forme traditionnelle, les schémas Box-splines utilisés (Loop, Catmull-Clark) ont les coefficients des règles aux sommets irréguliers calculées pour satisfaire les conditions suivantes :
 - Schéma C^1 aux sommets irréguliers
 - Composante « coupe » de la courbure bornée

Limites

Les irrégularités

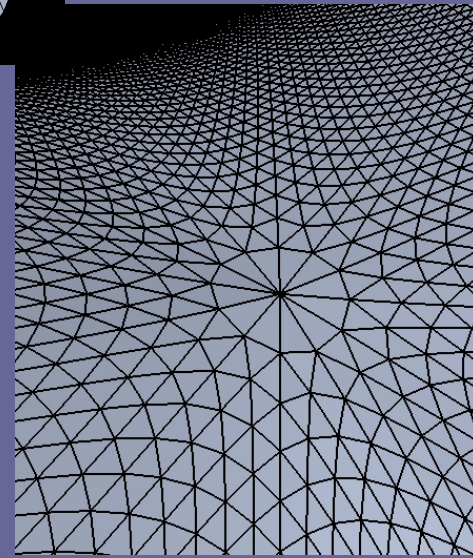
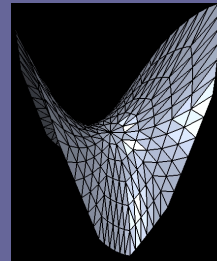
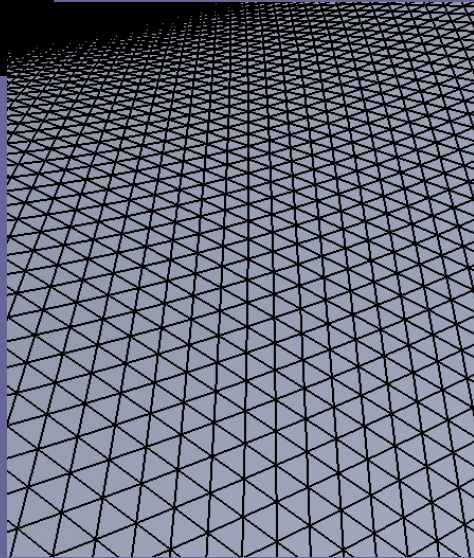
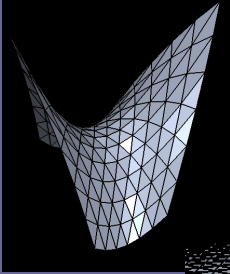
- Autour des points irréguliers :



[BK04] [SB03]

Les irrégularités

- Autour des points irréguliers :



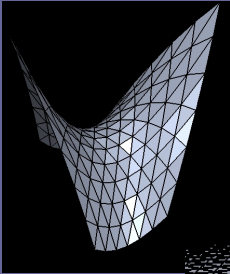
Artefact Polaire

[BK04]

[SB03]

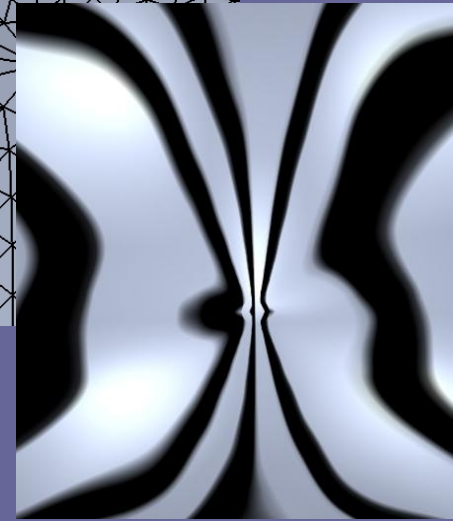
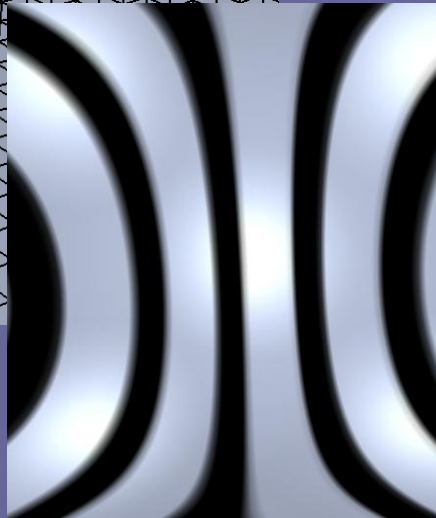
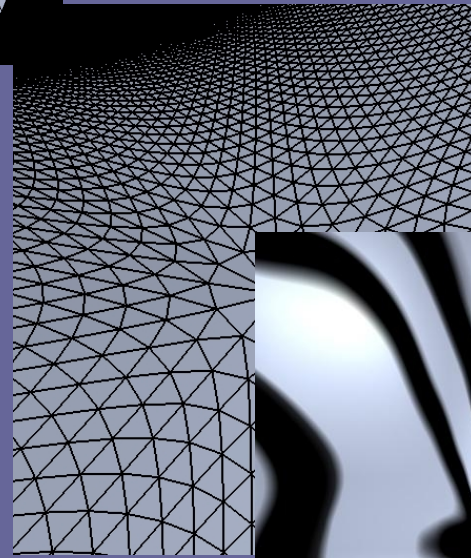
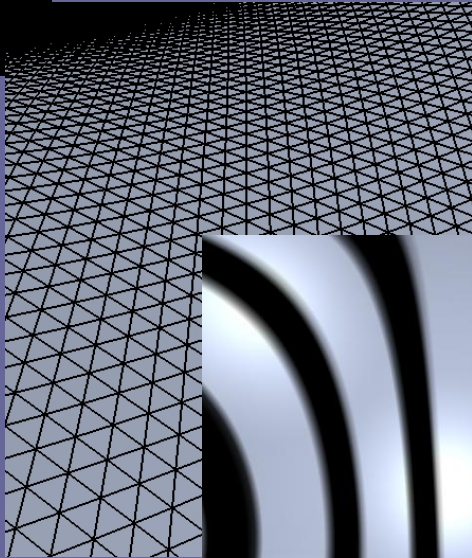
Les irrégularités

- Autour des points irréguliers :



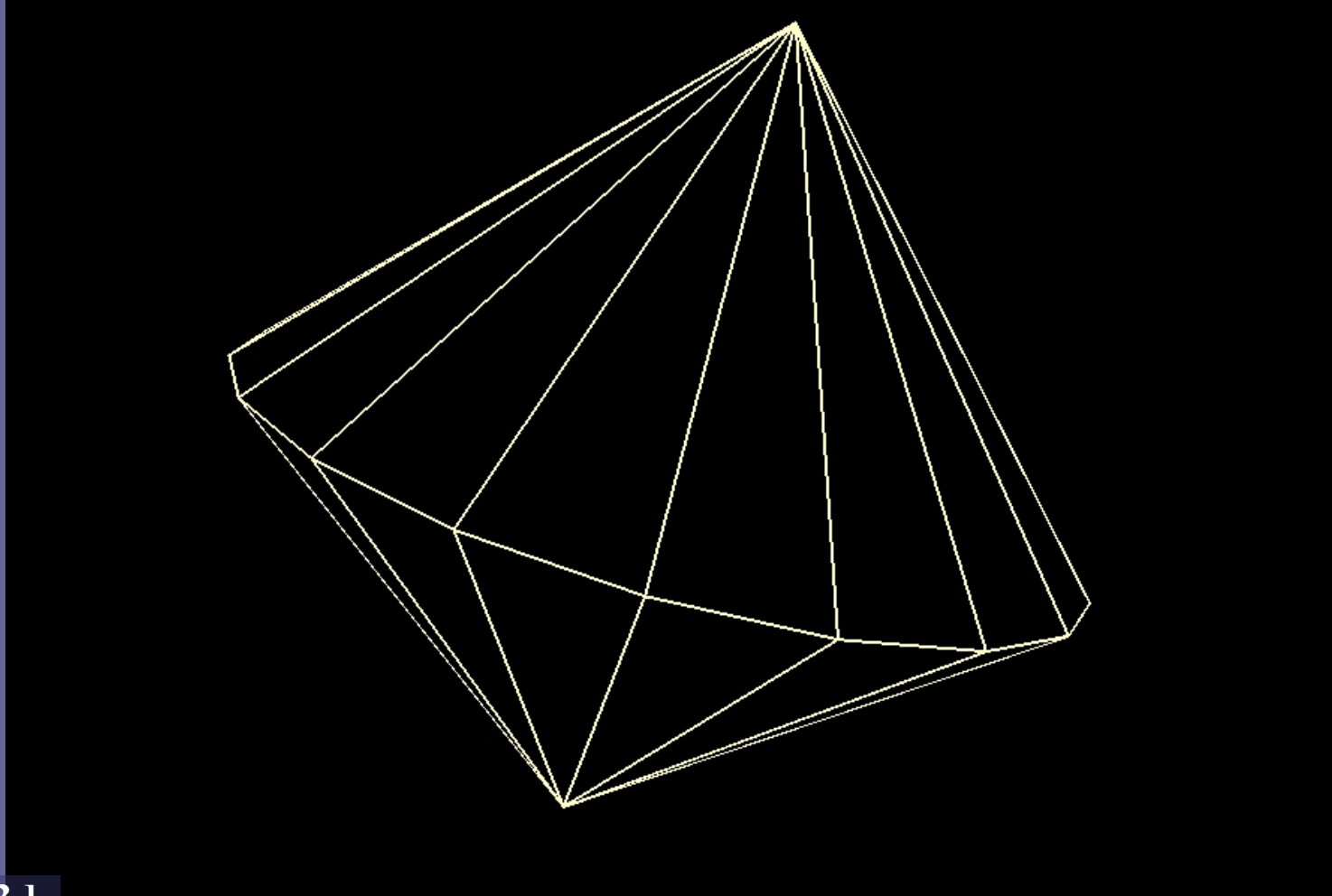
Artefact Polaire

Surface seulement C^1



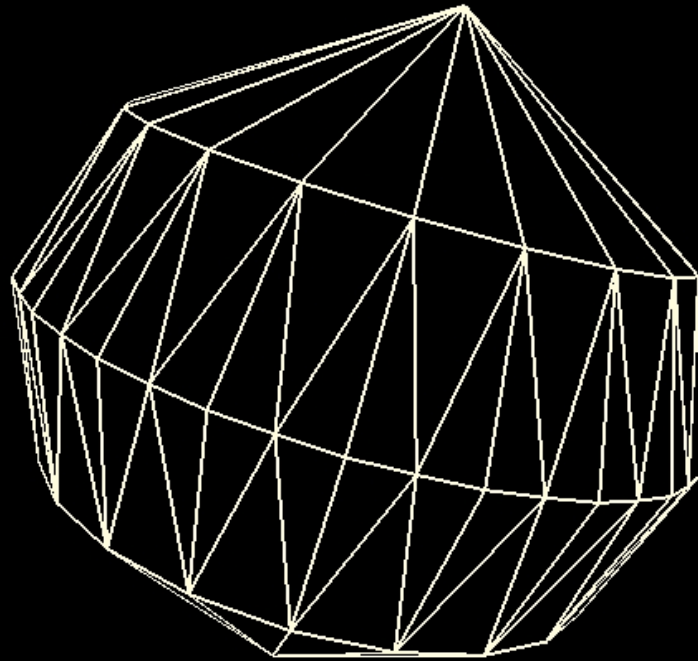
[BK04]

Les irrégularités



[SB03]

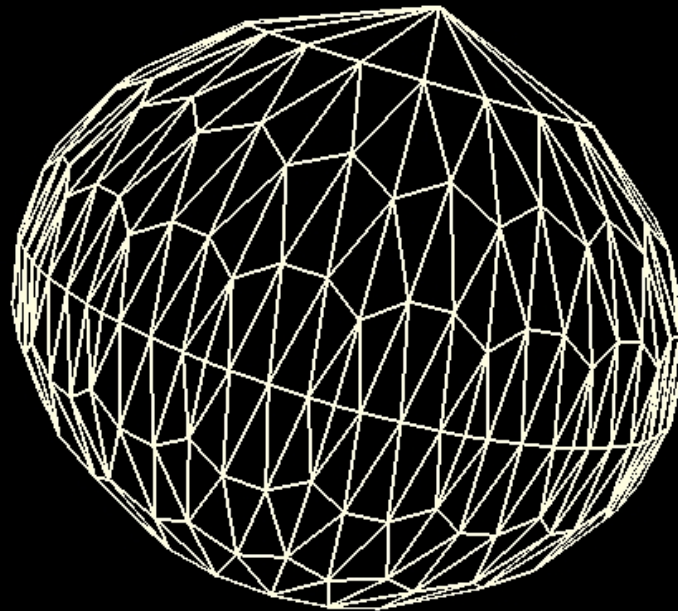
Les irrégularités



[SB03]

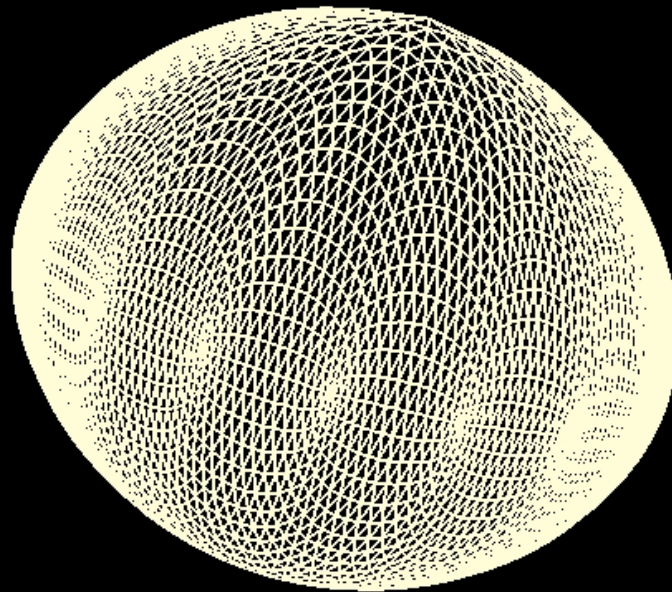
Les irrégularités

Artefact Polaire



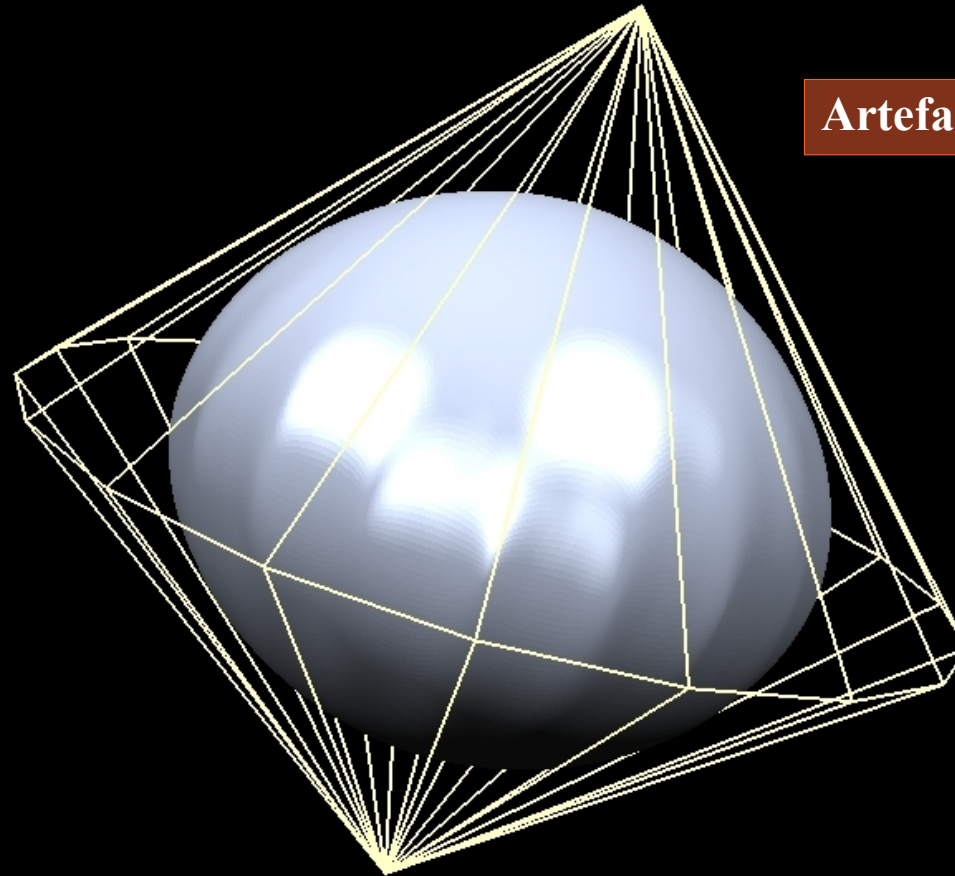
[SB03]

Les irrégularités



[SB03]

Les irrégularités



Artefact Radial

[SB03]

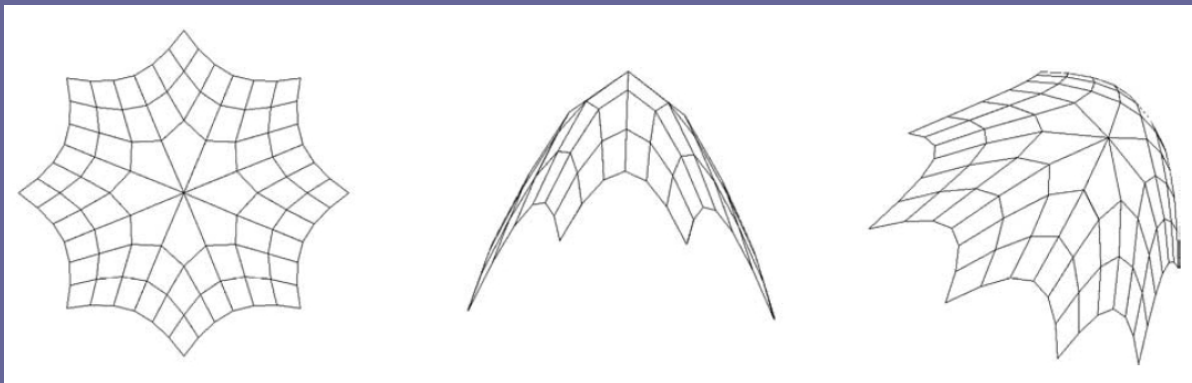
Courbure aux sommets irréguliers

- Catmull-Clark :
 - Courbure bornée uniquement sur la « **coupe** » ($|\lambda_3| = |\lambda_1|^2$)
 - Mais la valeur propre de **selle** est supérieure à la valeur propre de **coupe** ($|\lambda_3| < |\lambda_4| = |\lambda_5|$)

[KPR04] [PR04]

Courbure aux sommets irréguliers

- Catmull-Clark :
 - Courbure bornée uniquement sur la coupe ($|\lambda_3| = |\lambda_1|^2$)
 - Mais la valeur propre de **selle** est supérieure à la valeur propre de **coupe** ($|\lambda_3| < |\lambda_4| = |\lambda_5|$)



[KPR04] [PR04]

Conclusion

Subdivision basée Box-spline

- Les plus
 - Généralisation des surfaces Box-splines à des polygones de contrôle quelconques
 - Connaissance de la surface limite
 - Schémas de continuité C^2 (sauf en quelques points isolés)
 - Simplicité de calcul des règles régulières
 - Les schémas standards sont tout de même C^1 aux sommets irréguliers

Subdivision basée Box-spline

- Les plus
 - Généralisation des surfaces Box-splines à des polygones de contrôle quelconques
 - Connaissance de la surface limite
 - Schémas de continuité C^2 (sauf en quelques points isolés)
 - Simplicité de calcul des règles régulières
 - Les schémas standards sont tout de même C^1 aux sommets irréguliers
- Les moins
 - Difficulté d'améliorer le comportement du schéma aux sommets irréguliers
 - Artefact polaire
 - Artefact radial
 - Discontinuité de courbure
 - Convergence en selle (ou coupe)

Quelques idées de recherche

- Améliorations du comportement des schémas aux sommets irréguliers
 - Subdivision à partir de couple Point / Normale
 - Subdivision sur les nuages de points

Livres et cours

- A. Iske, E. Quak and M.S. Floater (Eds). Tutorial on Multiresolution in Geometric Modelling. Springer, 2002.
- J. Warren and H. Weimer. Subdivision methods for geometric design : a constructive approach. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002.
- D. Zorin and P. Schröder. Subdivision for modeling and animation. SIGGRAPH 2000 Course Notes, 2000.

Bibliographie

- [BGD05] L. Barthe , C. Gerot, M.A. Sabin and L. Kobbelt. Simple computation of the eigencomponents of a subdivision matrix in the Fourier domain. Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, N.A. Dodgson et al (eds), Springer-Verlag, pages 245-257, 2005.
- [BK04] L. Barthe and L. Kobbelt. Subdivision scheme tuning around extraordinary vertices, Computer Aided Geometric Design, 21(6), pp. 561-583, 2004.
- [BS88] A.A. Ball and D.J.T. Storry. Conditions for tangent plane continuity over recursively generated B-spline surfaces. ACM Transactions on Graphics, 7(2), pp. 83-102, 1998.
- [CC78] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. Computer Aided Design, 10 (6), pp. 350-355, 1978.
- [dBH94] C. de Boor, D. Hollig and S. Riemenschneider. Box Splines. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [DS78] D. Doo and M.A. Sabin. Analysis of the behaviour of recursive subdivision surfaces near extraordinary points. Computer Aided Design, 10 (6), pp. 356-360, 1978.
- [GBD05] C. Gerot, L. Barthe, N.A. Dodgson and M.A. Sabin. Subdivision as a sequence of sampled C_p surfaces. Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, N.A. Dodgson, M.S. Floater and M.A. Sabin (eds), Springer-Verlag, pp. 259-270, 2005.
- [KPR04] K. Karčiauskas, J. Peters and U. Reif. Shape characterization of subdivision surfaces - case studies. Computer Aided Geometric Design, 21(6) , pp. 601-614, 2004.
- [Loo87] C. Loop. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Master's thesis, University of Utah, 1987.

Bibliographie

- [Pra98] H. Prautzsch. Smoothness of subdivision surfaces at extraordinary points. *Adv. Comp. Math.*, 14, pp. 377-390, 1998.
- [PR98] J. Peters and U. Reif. Analysis of algorithms generalizing B-spline subdivision. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 35(2), pp. 728-748, 1998.
- [PR04] J. Peters and U. Reif. Shape characterization of subdivision surfaces - basic principles. *Computer Aided Geometric Design*, 21(6), pp. 585-599, 2004.
- [PS04] J. Peters and L.J. Shiue. Combining 4- and 3-direction Subdivision. *ACM Transaction on Graphics*, 23 (4), pp. 980-1003, 2004.
- [Rei95] U. Reif. A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices. *Computer Aided Design*, 12, pp. 153-174, 1995.
- [SB03] M.A. Sabin and L. Barthe. Artifact in recursive subdivision surfaces. *Curve and Surface Fitting: St Malo 2002*, A. Cohen, J.L. Merrien and L.L. Schumaker (eds), Nashboro Press, Brentwood, pp. 353-362, 2003.
- [Zor00] D. Zorin. A method for analysis of C1-continuity of subdivision surfaces. *SIAM Journal of Num. Anal.*, 35 (5), pp. 1677-1708, 2000.

Merci pour votre attention

Questions ?