Partage équitable de ressources communes

(1) Un modèle général et son application au partage de ressources satellitaires

Hélène Fargier* — Jérôme Lang*
Michel Lemaître — Gérard Verfaillie****

** Institut de Recherches en Informatique de Toulouse,*
118, route de Narbonne, F-31062 Toulouse cedex
{fargier, lang}@irit.fr

*** Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, Centre de Toulouse*
2, avenue E. Belin, B.P. 4025, F-31055 Toulouse cedex 4
{Michel.Lemaitre, Gerard.Verfaillie}@cert.fr

RÉSUMÉ. De nombreuses activités industrielles ou de recherche ont un coût tel qu'il est souvent avantageux pour les agents concernés de cofinancer la construction ou l'acquisition d'une ressource commmune nécessaire à l'activité. Cette ressource devra ensuite être exploitée en commun, donc partagée. Les règles de partage devront prendre en compte des préférences antagonistes : chaque agent veut maximiser sa propre satisfaction, tandis que collectivement, on recherche des décisions équitables et exploitant au mieux la ressource. Nous proposons dans cet article un modèle formel du problème de partage de biens indivisibles, sans possibilité de compensations monétaires, et avec des contraintes d'admissibilité quelconques. Ce modèle est appliqué à un cas concret, celui du partage de ressources satellitaires.

ABSTRACT. Many industrial or research activities are so expensive that it is often benefitable for the involved agents to cofund the construction or the purchase of a common required resource. This resource will then be exploited in common, therefore in a shared way. The rules for resource sharing should take account of the possibly antagonistic preferences: each agent wants to maximize its own satisfaction, whereas, from the collective point of view, efficient decisions – i.e., decisions which both are equitable and exploit the resources in an optimal way – are looked for. We give in this article a formal model for indivisible goods resource sharing without monetary compensations and with arbitrary admissibility constraints. The model is applied to a real-world case, namely sattelite resource sharing.

MOTS-CLÉS : partage équitable, enchères combinatoires, agrégation de préférences, aide multicritère à la décision.

KEYWORDS: equitable resource sharing, combinatorial auctions, preference aggregation, multicriteria decision aid.

1. Introduction

De nombreuses activités, industrielles ou de recherche, ont un coût tel qu'il est souvent avantageux pour les agents concernés – voire indispensable – de cofinancer la construction ou l'acquisition d'une ressource commune nécessaire à l'activité. Cette ressource devra ensuite être exploitée en commun, donc partagée. De bons exemples de cette situation apparaissent dans le domaine spatial : les stations spatiales, les constellations de satellites d'observation de la Terre, les sondes spatiales, sont des ressources extrêmement coûteuses, et donc souvent construites et financées en commun par plusieurs pays. Chaque pays est en droit d'attendre un retour d'exploitation correspondant à la part d'investissement financier qu'il a consenti dans le projet. Se pose donc le problème de l'exploitation « optimale » de la ressource commune. Plus précisément, l'exploitation d'une ressource commune est soumise à :

1) **des contraintes physiques :** par exemple, seul un nombre limité d'expériences est susceptible d'être embarqué à bord d'une sonde spatiale. Ce sont des contraintes impératives, devant absolument être respectées ;

2) **des objectifs d'efficacité :** chaque agent souhaite individuellement obtenir un maximum de retour sur investissement ; d'autre part, d'un point de vue collectif, on voudrait exploiter la ressource au maximum ;

3) **un objectif d'équité :** les agents souhaitent tous que le partage soit équitable ; en particulier, ils doivent être traités de façon équivalente et aucun ne doit être favorisé au détriment des autres.

L'énumération précédente fait apparaître clairement le type de problème à résoudre : **un problème sous contraintes et multi-objectif**. Ces objectifs – efficacité, équité – sont généralement antagonistes : il est clair que les objectifs individuels d'efficacité des agents sont opposés (on ne peut en général octroyer une satisfaction maximale à un agent sans nuire à la satisfaction des autres agents) ; l'objectif d'équité lui-même peut tirer dans un sens opposé aux objectifs d'efficacité : un partage parfaitement équitable (à la limite, n'allouant aucune ressource) est rarement efficace (la ressource est sous-exploitée) ; réciproquement, les partages qui maximisent l'utilisation de la ressource sont rarement équitables. La tension entre efficacité et équité est inhérente à tout problème de décision impliquant plusieurs agents, lorsque chacun d'eux retire, de chaque décision possible, une satisfaction propre. L'exemple qui suit illustre ce point, tout en introduisant de façon informelle des notions importantes – notions qui seront définies précisément dans le corps de l'article.

Exemple 1 *Deux agents, 1 et 2, doivent prendre une décision commune parmi quatre décisions possibles (admissibles)* a, b, c *et* d*. Chaque décision apporte aux agents une satisfaction mesurée ici par un nombre – c'est par exemple l'équivalent en monnaie des effets de la décision pour chaque agent, un pourcentage sur une satisfaction totale … – les échelles de satisfaction étant supposées communes (un même nombre exprime un même degré de satisfaction). Les profils de satisfaction sont les suivants :* $a : \langle 4, 4\rangle, b : \langle 3, 6\rangle, c : \langle 7, 5\rangle, d : \langle 2, 11\rangle$ *(le premier nombre mesure la satisfaction de l'agent 1, le second celle de l'agent 2). La décision* a *est parfaitement équitable,* *mais elle n'est pas efficace, en ce sens qu'elle donne moins de satisfaction à chaque agent que la décision* c *(on dit que* a *est dominée par* c*). Malgré sa parfaite équité, il est logique d'écarter la décision* a*, puisque les deux agents lui préfèrent* c*, pourtant moins équitable. Comment choisir maintenant entre* b*,* c *et* d *? Aucune décision ne domine une autre. Pourtant, d'un point de vue collectif, le principe d'équité veut que les agents soient traités de façon parfaitement équivalente, donc la décision* $b : \langle 3, 6\rangle$ *est équivalente à* $b' : \langle 6, 3\rangle$*. En conséquence,* b *est écartée parce que* b' *est dominée par* c*. Restent en lice* c *et* d*. La décision* c *maximise la satisfaction de l'agent le plus défavorisé (critère « égalitariste »), tandis que* d *maximise la somme des satisfactions des agents – pour autant que cette somme ait un sens – : ce critère est dit « utilitariste ». Le choix entre* c *et* d *devra être étayé par des principes relevant plus de l'éthique que des mathématiques, tout en tenant compte des spécificités de chaque application.*

Revenons à notre problème de partage, qui est un problème de décision collective particulier [BRA 96]. Nous nous plaçons dans le cadre du **partage de biens indivisibles, sans possibilité de compensations monétaires**. Résoudre un tel problème de partage consiste à répondre aux questions suivantes : (1) comment définir et mesurer la satisfaction des agents face à une décision de partage ? (2) Quel sens précis (mathématique) donner aux concepts d'efficacité et d'équité ? (3) Quelles décisions de partage réalisent les meilleurs compromis entre ces objectifs contradictoires, et comment les calculer ? Le but principal de cet article est de fournir un modèle conceptuel général, paramétrable, permettant d'abord de poser clairement ces questions. Nous proposerons des sens précis aux mots « efficacité » et « équité », et nous discuterons de leur traduction en termes mathématiques. Nous montrerons enfin comment utiliser le modèle pour poser et résoudre un problème de partage précis à l'origine de cette étude : l'exploitation partagée d'une ressource commune constituée d'une constellation de satellites d'observation de la Terre.

L'article est organisé comme suit : la section 2 décrit l'application qui vient d'être évoquée, illustrant ainsi concrètement un problème de partage. Les sections 3 à 6 présentent le modèle conceptuel général de partage. La section 7 montre son utilisation dans le cadre de notre application cible. Nous concluons, section 8, par l'énoncé de travaux connexes, et par l'évocation de différentes pistes pour des recherches futures. Un article compagnon [FAR 04] contient une analyse de la complexité théorique du problème, ainsi que la description d'algorithmes généraux, complets et incomplets, permettant de trouver un partage admissible maximisant l'utilité collective.

2. Un problème de partage de ressources satellitaires

Nous décrivons ici informellement une version simplifiée d'un problème de partage réel, concernant l'exploitation commune, par plusieurs agents (pays, organismes internationaux...), d'une constellation de satellites d'observation de la Terre. Le problème non simplifié est décrit dans le rapport [LEM 02]. Nous supposerons que chaque agent a contribué au financement de la constellation à un même niveau. Une exploitation équitable pour tous est donc recherchée. La mission de ce type de satellites consiste à prendre des photographies de la Terre, en réponse à des demandes d'observations déposées par des agents. L'activité de la constellation est organisée par intervalles de temps successifs, généralement 24 heures, ce que nous supposerons ici. Les agents déposent, auprès d'un centre d'exploitation commun, des demandes de photographie valables pour un jour donné. Le centre d'exploitation choisit, parmi celles-ci, l'ensemble des demandes satisfaites, c'est-à-dire l'ensemble des photographies prises chaque jour par la constellation. Les contraintes physiques d'exploitation sont telles qu'il est impossible, en général, de satisfaire simultanément toutes les demandes déposées pour un jour donné. Autrement dit, seul un sous-ensemble des demandes pourra être satisfait.

Les demandes d'un agent peuvent être d'importances inégales. À cet égard, deux modes d'exploitation sont possibles :

– dans le mode dit **hiérarchique**, chaque agent classe ses demandes du jour par ordre de **priorité**, avec une seule demande par niveau. Ce système de priorité a le sens suivant : la sélection d'une demande de priorité donnée est toujours préférée à la sélection de n'importe quel ensemble de demandes de priorités strictement inférieures. En outre, on peut ajouter dans ce mode une contrainte limitant le nombre des demandes satisfaites à un nombre maximal autorisé ;

– dans le mode dit **commercial**, chaque agent associe un **poids** à chacune de ses demandes. Dans ce mode, un poids est un nombre réel positif, et correspond implicitement à des préférences additives : soit deux ensembles de demandes d'un agent dont la somme des poids est identique ; l'agent concerné est indifférent devant l'obtention de l'un ou de l'autre ensemble de demandes.

Chaque jour, les deux modes sont enchaînés. Le mode hiérarchique est appliqué en premier. Puis le mode commercial s'appplique à toutes les demandes du jour non encore satisfaites, en ajoutant une contrainte stipulant que les partages admissibles doivent être compatibles avec les demandes sélectionnées précédemment dans le mode hiérarchique.

Voici quelques ordres de grandeur concernant le problème réel associé. Les agents sont typiquement entre 4 et 8. En mode hiérarchique, chaque agent dépose chaque jour une vingtaine de demandes. En mode commercial, il y a plusieurs centaines de demandes candidates chaque jour.

3. Un modèle pour les problèmes de partage

3.1. *Généralités sur les procédures de partage*

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est intéressant de décrire les principes généraux de partage sous-jacents au modèle que nous proposons, en situant ces principes parmi d'autres possibles. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux ouvrages suivants : [BRA 96, MOU 95, ROS 94, YOU 94]. D'une façon générale, il existe deux grands types de procédures de partage : les procédures de type « jeu », ou **décentra-**

lisées, et les procédures de type « arbitrage », ou **centralisées**. Dans une procédure de type jeu, une règle du jeu est établie et acceptée par les agents. Ceux-ci sont autonomes. Ils interagissent et prennent librement leurs décisions, pourvu que la règle du jeu soit respectée. Un exemple simple et connu de ce type de procédure est la procédure « tu-coupes-je-choisis » utilisable par deux personnes pour partager équitablement un gâteau : celle ou celui qui coupe le fait librement, l'autre choisit librement une des parts. Les procédures de type jeu ont fait l'objet d'études approfondies, toutefois dans des cas très simples. Voir par exemple [BRA 96]. Le but de ces études est, d'une part, d'indiquer les stratégies optimales de chaque agent, et d'autre part, d'analyser les qualités formelles des procédures, telles que l'efficacité, l'équité, la manipulabilité, auxquelles on attribue alors un sens précis. À l'inverse d'une procédure de type jeu, les agents, dans une procédure de type arbitrage, s'en remettent à un arbitre supposé juste et impartial, dont les décisions sont incontestables. Plutôt que de laisser les agents « jouer entre eux », l'idée est ici de rendre la justice de manière centralisée, selon des principes d'équité démocratiquement consentis. La procédure sera souvent décrite par un algorithme. En réalité, une procédure de partage n'est jamais purement d'un type ou d'un autre, mais fait apparaître à la fois des aspects de jeu et d'arbitrage. Ainsi, les actions légales d'une procédure de type jeu sont naturellement sous-tendues par des principes d'équité. Dans l'autre sens, il est nécessaire, dans une procédure d'arbitrage, de collecter les demandes et les préférences des agents ; celles-ci peuvent être annoncées de façon plus ou moins sincère, injectant ainsi un aspect de jeu dans la procédure. Enfin, des procédures de partage mixtes sont imaginables, comme celle-ci : un arbitre commence par dégager un sous-ensemble de partages possibles, puis les agents utilisent une procédure décentralisée pour arrêter entre eux le choix final.

Dans une procédure décentralisée (de type jeu), les agents doivent échanger entre eux beaucoup d'informations. Une telle voie n'est donc envisageable que lorsque le nombre d'agents est faible, la taille des données petite, et le nombre d'instances du problème de partage à résoudre faible également. Une procédure centralisée convient mieux dans les cas opposés (grand nombre d'agents, nombreuses instances, données volumineuses), ou lorsque les agents ne souhaitent pas diffuser entre eux les informations les concernant (par exemple leurs demandes et leurs préférences).

Le modèle que nous proposons dans cette étude correspond à une procédure de type arbitrage. Il est basé sur deux niveaux de satisfaction : l'utilité individuelle d'un agent (mesurant la satisfaction d'un agent devant un partage donné), et enfin l'utilité collective, que l'on peut considérer comme mesurant la satisfaction d'un arbitre devant un partage donné. Cette utilité collective est bien évidemment fonction des utilités individuelles des agents. La démarche suivie dans l'exposition du modèle est d'introduire et de justifier progressivement les concepts, partant du plus général jusqu'aux choix particuliers effectués pour notre application. Des exemples illustreront les concepts introduits. Dans cette étude, nous supposons que les agents ont des droits égaux sur la ressource (ils ont, par exemple, financé la ressource commune à niveau égal).

3.2. *Un modèle général pour les problèmes de partage*

Définition 1 (Problème de partage) *Un* **problème de partage** *est un quadruplet* $\pi = \langle N, \mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{U} \rangle$ *où :*

– $N = \{1, \ldots, n\}$ *est un ensemble fini d'***agents** *;*

– $\mathcal{O}$ *est un ensemble fini d'***objets** *à attribuer aux agents ;*

– $\mathcal{C}$ *est un ensemble fini de* **contraintes** *;*

– $\mathcal{U}$ *est une* **structure d'utilité**.

Définition 2 (Partage) *Un* **partage** *pour* π *est un vecteur* $\mathbf{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ *où* $x_i \subseteq \mathcal{O}$ *pour tout* $i \in N$*. La composante* x_i *est la* **part** *de l'agent* i *dans* $\mathbf{x}$*, et c'est aussi l'ensemble des objets* **attribués** *à l'agent* i *par le partage* $\mathbf{x}$*. On dira qu'un objet* o *est attribué par* $\mathbf{x}$ *s'il est attribué à l'un des agents au moins.*

Noter qu'un même objet peut être attribué à plusieurs agents (les x_i ne sont pas nécessairement disjoints), et que les objets ne sont pas nécessairement tous attribués. Les contraintes $\mathcal{C}$ vont définir l'ensemble des partages admissibles :

Définition 3 (Partages admissibles) *Soit* π *un problème de partage. Un partage est* **admissible** *si et seulement s'il satisfait toutes les contraintes de* $\mathcal{C}$*. On note* $Adm(\pi)$ *l'ensemble de tous les partages admissibles de* π*.*

Parmi les partages admissibles, la structure d'utilité $\mathcal{U}$ va permettre de sélectionner les meilleurs. Détaillons ces deux composants du modèle dont la nature dépend fortement de l'application.

3.2.1. *Contraintes*

Les contraintes que doivent satisfaire les partages sont spécifiques à l'application et peuvent être assez diverses :

– les **contraintes de préemption** expriment qu'un objet donné ne peut être attribué qu'à un seul agent au plus ; elles ne sont pas nécessairement présentes (mais le sont dès lors que les biens sont privés ou consommables) ;

– des **contraintes de capacité** : elles peuvent par exemple exprimer que deux objets donnés ne peuvent être simultanément attribués (**contraintes d'exclusion**), ou plus largement exprimer un nombre ou un « volume » maximal d'objets attribuables ; il peut s'agir encore de contraintes plus complexes interdisant l'attribution simultanée d'objets appartenant à un ensemble donné d'objets ;

– d'autres contraintes, par exemple des **contraintes de faisabilité physique** ou encore des **contraintes de dépendance entre objets** exprimant par exemple que si tel objet est attribué à un agent, alors tel autre doit l'être également.

Les contraintes peuvent être exprimées par des formules de la logique propositionnelle, par des équations linéaires ou non, en nombres entiers ou pas, des listes de cas admissibles ou des listes de cas inadmissibles, comme dans les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP) [MAC 92, DEC 92], etc. : le langage d'expression des contraintes ne doit pas être considéré comme figé. Il faut noter qu'un problème de partage ne comporte pas d'incertitude (concernant l'état du monde actuel, la survenue d'événements extérieurs imprévisibles, etc.) : on sait par conséquent toujours dire si un partage est admissible ou non.

Exemple 2 *$\mathcal{O}$ est l'ensemble des parts d'un gâteau, toutes de même taille. $\mathcal{C}$ exprime le fait qu'une même part ne peut pas être attribuée à deux agents : les contraintes expriment simplement que $x_i \cap x_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in N$. Il n'y a pas d'autres contraintes que ces contraintes de préemption.*

Exemple 3 *Dans le contexte de l'application de partage de ressources satellitaires décrite en section 2, $\mathcal{O}$ est un ensemble de photographies réalisables isolément. $\mathcal{C}$ est un ensemble de contraintes physiques, intégrant le fait que deux photographies géographiquement proches ne peuvent pas être réalisées toutes les deux (si on réalise la première photographie, on n'aura pas le temps de réaliser la seconde à cause du défilement du satellite) et ne peuvent donc pas être attribuées par un même partage ; en revanche, il n'y a pas de contraintes de préemption : les biens ne sont pas consommables, et une fois qu'une photographie est réalisée, elle peut être attribuée à tous les agents qui la désirent.*

Exemple 4 *$\mathcal{O}$ est un ensemble d'objets mis en vente ; $\mathcal{C}$ exprime qu'un même objet ne peut être vendu à deux acheteurs (contraintes de préemption).*

Exemple 5 *$\mathcal{O}$ est un ensemble d'objets qu'un groupe d'individus souhaite acheter pour la collectivité : non seulement il n'y a pas de contraintes de préemption mais on a les contraintes $x_i = x_j$ pour tout $i, j \in N$ (on peut donc simplifier la formalisation du problème en voyant un partage comme un simple sous-ensemble de $\mathcal{O}$). $\mathcal{C}$ exprime que chaque objet a un prix d'achat, et la collectivité a une somme limitée d'argent : ce sont des contraintes de capacité.*

3.2.2. *Structures d'utilité*

Dans un monde idéal, chaque agent spécifierait les objets qu'il aimerait se voir attribuer et le partage idéal serait donc celui qui donne à chaque agent les objets qu'il désire, puisque tous les agents seraient pleinement et également satisfaits ; mais en général ce partage n'est pas admissible : on cherchera alors à établir un partage admissible, efficace et équitable, en fonction des préférences des agents et des préférences d'un arbitre supposé impartial, représentant en quelque sorte la collectivité.

Comment modéliser les préférences des agents et de l'arbitre ? Nous optons dans cette étude pour le modèle classique, en supposant que les préférences de chaque agent (et de l'arbitre) forment une relation de préordre complet[1] sur l'ensemble $Adm(\pi)$

1. Un préordre complet (ou total) sur E est une relation binaire totale (tous les éléments de E sont comparables) réflexive et transitive.

des partages admissibles. Cette hypothèse est quelquefois forte : elle ne prend pas en compte les possibilités ou les souhaits d'incomparabilité, de préférences non transitives, ou encore de seuils d'indifférence. Pour des modèles de préférence plus riches, on consultera par exemple [VIN 89, ROY 93]. Dans le cas où l'ensemble des alternatives (ici partages) possibles est fini – c'est notre cas[2] : $Adm(\pi) \subseteq (2^{\mathcal{O}})^n$, et $\mathcal{O}$ est fini – un préordre peut être « codé » par une **fonction d'utilité** sur l'ensemble des alternatives possibles, à valeur dans un ensemble totalement ordonné. Dans notre problème de partage, des fonctions d'utilité vont intervenir à **deux niveaux** :

– au niveau **individuel**, l'utilité d'un partage admissible **pour un agent donné**, mesure la satisfaction de l'agent i pour ce partage ;

– au niveau **collectif**, l'utilité d'un partage admissible **pour le groupe d'agents**, mesure la satisfaction de la collectivité des agents pour ce partage.

Bien entendu, plus l'utilité (individuelle ou collective) est élevée, plus le partage est satisfaisant (pour l'agent ou pour la collectivité, respectivement) ; par conséquent, on choisira comme partage final un de ceux qui maximisent l'utilité collective.

L'utilité collective dépend bien sûr des utilités individuelles. De même, dans le modèle que nous proposons, l'utilité individuelle est fonction de souhaits, besoins, désirs exprimés par l'agent sous la forme de **demandes**, c'est-à-dire de spécifications qui peuvent (ou non) être satisfaites par un partage. On détaillera en section 4 le langage qui est offert aux agents pour l'expression de leurs demandes – disons simplement pour l'instant qu'un poids peut être associé à une demande par un agent, mesurant l'importance qu'il accorde à la satisfaction de cette demande. La structure d'utilité d'un problème de partage peut donc être définie comme suit :

Définition 4 (Structure d'utilité) *Une* **structure d'utilité** *associée à un problème de partage π est un triplet $\mathcal{U} = \langle \Delta, \mathbf{ua}, uc \rangle$ où*

– $\Delta = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_n \rangle$, où chaque Δ_i est l'ensemble fini des **demandes pondérées** *de l'agent i ;*

– $\mathbf{ua} = \langle ua_1, \ldots, ua_n \rangle$ où ua_i, la **fonction d'utilité individuelle de l'agent** *i, est une fonction de $Adm(\pi)$ dans une échelle ordonnée $Lua_i = [\bot_{Lua_i}, \top_{Lua_i}]$;*

– uc, la **fonction d'utilité collective***, est une fonction de $Adm(\pi)$ dans une échelle ordonnée $L = [\bot, \top]$.*

Le vecteur d'utilités individuelles $\langle ua_1(\mathbf{x}), \ldots, ua_n(\mathbf{x}) \rangle$ est appelé **profil de satisfaction** *associé au partage $\mathbf{x}$.*

Exemple 2 (suite) *Chaque agent désire toutes les parts du gâteau et n'en désire pas une plus particulièrement que les autres : chaque demande Δ_i contient toutes les parts o_1 à o_m auxquelles on associe la même pondération : $\Delta_i = \{\langle o_1, 1\rangle, \ldots, \langle o_m, 1\rangle\}$. Chaque agent retire une utilité individuelle égale au nombre de parts qui lui sont attribuées : $ua_i(\mathbf{x}) = \sum\{w \mid \langle o, w\rangle \in \Delta_i$ et $o \in x_i\} = |x_i|$. On travaille donc*

2. Si X est un ensemble, 2^X est l'ensemble des parties de X.

avec l'échelle $Lua_i = \{0, \ldots, m\}$. Un premier critère de partage, dit « utilitariste », serait de maximiser le **degré de satisfaction moyen** *: $uc(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} ua_i(\mathbf{x})$. On utilise l'échelle $L = \{0, 1, \ldots, m \cdot n\}$ pour l'évaluation de l'utilité collective. Ce critère est assez mauvais : il ne départage en rien les partages admissibles du moment qu'ils attribuent toutes les parts. Par exemple, pour n parts à partager entre n agents, l'attribution d'une part à chacun procure une utilité collective égale à l'attribution de n parts à un seul agent. La procédure plus « égalitariste » qui consiste à laisser à tour de rôle les agents choisir une part, jusqu'à ce qu'il reste moins de n parts serait plutôt encodée par : $uc(\mathbf{x}) = \min_{i \in N} ua_i(\mathbf{x})$.*

Exemple 4 (suite) *Imaginons que les préférences des acheteurs soient ici les prix maximaux qu'ils sont prêts à payer pour chaque combinaison d'objets : on est ici dans le domaine des* **enchères combinatoires** *(voir par exemple [ROT 98, BOU 01]). Dans le cas particulier où les acheteurs ne cherchent pas des lots, ils spécifient un prix maximum pour chaque objet isolément ; les demandes d'un Δ_i sont alors de la forme $\langle o, w \rangle$ où o est un objet et w le prix que i est prêt à payer pour obtenir o. Dans les problèmes d'enchères, pour le calcul de l'utilité collective, on se place généralement du point de vue du vendeur, ce qui impose que le critère soit utilitariste. Le partage optimal est alors trivial : il suffit de vendre chaque objet au plus offrant. Ce qui est encodé par les fonctions d'utilité suivantes : $ua_i(\mathbf{x}) = \sum \{w \mid \langle o, w \rangle \in \Delta_i$ et $o \in x_i\}$, et $uc(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} ua_i(\mathbf{x})$.*

L'utilité collective, qui définit les meilleurs partages admissibles, se calcule donc en **deux phases successives** :

$$\left.\begin{array}{c}(\Delta_1, \mathbf{x}) \mapsto ua_1(\mathbf{x}) \\ \ldots \\ (\Delta_n, \mathbf{x}) \mapsto ua_n(\mathbf{x})\end{array}\right\} \mapsto uc(\mathbf{x})$$

– la phase 1 (**intra-agent**) consiste à calculer, pour un partage admissible donné $\mathbf{x}$, son utilité individuelle $ua_i(\mathbf{x})$ pour chacun des agents, à partir de la compatibilité de la part qui lui revient selon $\mathbf{x}$ avec les demandes qu'il a formulées ;

– la phase 2 (**inter-agents**) consiste à calculer, pour un partage admissible donné $\mathbf{x}$, son utitilité collective $uc(\mathbf{x})$ à partir des utilités individuelles $ua_1(\mathbf{x})$, ..., $ua_n(\mathbf{x})$.

Les trois sections qui suivent ont pour objectif d'étudier en détails chacun des points évoqués : en section 4 on présente comment exprimer les demandes des agents (qui sont partie intégrante de l'*input* du problème de partage) ; en section 5 et 6 on étudiera en détails les fonctionnements des phases 1 et 2 ; en particulier, on énoncera les propriétés souhaitables des différentes fonctions d'utilité, en relation avec les exigences d'efficacité et d'équité.

4. Expression des préférences sur les partages : demandes pondérées

Un problème se pose avec la spécification des fonctions d'utilité individuelles : puisque le nombre de partages admissibles est en général exponentiel en la taille des données du problème, une spécification explicite de ces fonctions est trop coûteuse en temps et en espace et par conséquent impraticable dès lors que le nombre d'objets dépasse quelques unités. Afin de pallier ce problème, nous proposons un langage de **représentation compacte** des préférences des agents pour les partages, qui servira de support pour l'expression des fonctions d'utilité individuelle. Une telle démarche est classique en intelligence artificielle (tant pour la représentation des connaissances que pour celle des préférences). Le principe de la représentation compacte est celui des **langages logiques à pondérations** : une **demande pondérée** est un couple $\langle \varphi, w \rangle$ où φ est une **demande** et w est le **poids** de cette demande. Le poids est choisi sur une échelle ordonnée[3] $Lw_i = [\bot_{Lw_i}, \top_{Lw_i}]$ propre à l'agent i (une même demande peut être pondérée différemment par des agents différents). L'utilité individuelle $ua_i(\mathbf{x})$ de l'agent i pour le partage $\mathbf{x}$ s'exprimera comme une agrégation des poids de ses demandes satisfaites ou non par le partage (voir la section 5).

4.1. *Demandes*

Le cas le plus simple est celui de **demandes élémentaires** c'est-à-dire spécifiant chacun un objet isolé. Le problème, lorsque le langage d'expression des préférences limite les demandes à des objets individuels, est qu'un agent ne peut alors pas exprimer de **dépendances** entre objets dans ses préférences. Voici des exemples simples de dépendances :

– **objets interchangeables :** l'agent souhaite obtenir l'objet o_1 **ou** l'objet o_2 ; un seul des deux lui suffit, peu importe lequel ;

– **objets indissociables :** l'agent souhaite obtenir l'objet o_1 **et** l'objet o_2, sachant que l'un des deux ne lui est d'aucune utilité sans l'autre.

C'est pourquoi on définira les demandes comme des formules (élémentaires ou non) du langage propositionnel $L_{\mathcal{O}}^{+}$, défini comme suit :

Définition 5 (Demandes) *$L_{\mathcal{O}}^{+}$ est l'ensemble des formules bien formées que l'on peut construire sur l'ensemble de littéraux $\mathcal{O}$ à partir des connecteurs logiques $\vee$ et $\wedge$.*

Une demande est une formule de $L_{\mathcal{O}}^{+}$.

On note $F_i = \{\varphi_k^i, k = 1 \dots |\Delta_i|\}$ l'ensemble des demandes de l'agent i.

On dira qu'un objet est demandé par l'agent i s'il apparaît dans au moins une des demandes de i, et qu'il est demandé s'il est demandé par au moins un agent. On notera $\mathcal{D}_i$ l'ensemble des objets demandés par i et $\mathcal{D} = \cup_{i \in N} \mathcal{D}_i$ l'ensemble des objets demandés.

3. On utilise ici encore l'hypothèse implicite qu'un agent peut toujours exprimer ses préférences sur les demandes sous forme d'un préordre complet (voir la section 3.2.2).

Nous avons exclu la négation du langage $L^+_{\mathcal{O}}$ car nous faisons l'hypothèse qu'un agent ne retire aucune satisfaction à ne pas recevoir tel ou tel objet – que ne pas recevoir n'est pas un but à exprimer [4].

Pour compléter la définition de la notion de demande, définissons sous quelles conditions une demande peut être satisfaite :

Définition 6 (Satisfaction d'une demande) *On dira qu'un sous-ensemble $x \subseteq \mathcal{O}$ satisfait une demande $\varphi \in L^+_{\mathcal{O}}$, noté $x \models \varphi$, si et seulement si $\langle x, \neg(\mathcal{O} \setminus x)\rangle$ est un modèle de φ, où $\langle x, \neg(\mathcal{O} \setminus x)\rangle$ est l'interprétation dont les littéraux positifs sont les éléments de x et les littéraux négatifs les négations des éléments de $\mathcal{O} \setminus x$. On notera $Sat_i(\mathbf{x}) = \{\varphi \in F_i \mid x_i \models \varphi\}$ l'ensemble des demandes de i satisfaites par le partage $\mathbf{x}$.*

Exemple 6 *Soit $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, \cdots, o_{10}\}$ et $x_1 = \{o_1, o_2\}$. Dans le modèle $\langle x_1, \neg(\mathcal{O} \setminus x_1)\rangle$, les littéraux o_1, o_2 sont valués à vrai et les littéraux $o_3, o_4, \cdots o_{10}$ sont valués à faux. On a donc par exemple : $x_1 \models o_1$, $x_1 \not\models o_3$, $x_1 \models o_1 \vee o_3$, $x_1 \not\models o_1 \wedge o_3$.*

Pour finir, donnons une définition formelle à la notion de partage idéal :

Définition 7 (Partage idéal) *Un partage sera dit idéal s'il permet de satisfaire toutes les demandes, c'est-à-dire si et seulement si $Sat_i(\mathbf{x}) = F_i$ pour tout i.*

Puisque la négation n'est pas autorisée, on a $\mathcal{D}_i \models \varphi$ pour tout $\varphi \in F_i$ et tout $i \in N$. Le partage $\mathbf{x} = \langle \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n\rangle$ est donc idéal (mais il n'est généralement pas admissible).

4.2. *Demandes pondérées*

Le poids qu'un agent attache à une demande permet d'exprimer l'importance qu'il accorde à la satisfaction de sa demande (par exemple, dans un contexte où il existe une monnaie, le prix maximal qu'il est prêt à payer pour voir sa demande satisfaite). Il est exprimé sur une échelle $Lw_i = [\bot_{Lw_i}, \top_{Lw_i}]$ propre à l'agent i. L'élément $\bot_{Lw_i}$ désigne la plus petite valeur de Lw_i. On réservera à cette valeur le sens précis suivant : lorsque i donne à φ le poids $\bot_{Lw_i}$, il indique qu'il est parfaitement indifférent au fait de voir φ satisfaite ou pas. Pour simplifier, dans notre langage de représentation, l'agent i exprimera uniquement ses demandes de poids strictement plus grand que $\bot_{Lw_i}$. Les demandes non exprimées seront implicitement de poids $\bot_{Lw_i}$. Quant au poids maximal $\top_{Lw_i}$, on peut lui prêter plusieurs significations, par exemple :

4. Dans le cas où des **charges**, plutôt que des biens, sont à partager (par exemple, des colocataires devant se partager des services communs indivisibles : sortir la poubelle, préparer un repas, amener les enfants à l'école . . .), il suffit de considérer que les diverses utilités, y compris les poids, sont en fait des **désutilités**, et on cherchera à minimiser (plutôt que maximiser) les différentes fonctions d'utilité. Nous ne traitons pas ici le cas du partage simultané de biens et de charges.

– exprimer simplement une préférence maximale, sans plus ;

– exprimer le fait que si la demande correspondante est satisfaite, l'utilité du partage pour cet agent devient maximale, quelle que soit la satisfaction de ses autres demandes (on parle de demande « idéale ») ;

– exprimer le fait que si la demande correspondante n'est pas satisfaite, l'utilité du partage pour cet agent devient minimale, quelle que soit la satisfaction de ses autres demandes (on parle de demande « impérative »).

Le choix d'une signification pour $\top_{Lw_i}$ est en fait fortement lié à la façon dont la fonction d'utilité individuelle de l'agent est construite (cf. section 5).

Nous sommes maintenant en mesure de définir précisément la notion de demandes pondérées d'un agent :

Définition 8 (demandes pondérées) *L'ensemble des* **demandes pondérées d'un agent** i *est un ensemble de couples* $\Delta_i = \{\langle\varphi_1^i, w_1^i\rangle, \ldots, \langle\varphi_{|\Delta_i|}^i, w_{|\Delta_i|}^i, \rangle\}$*, où* $\varphi_k^i \in L_{\mathcal{O}}^{+}$ *et* $w_k^i \in Lw_i \setminus \perp_{Lw_i} =]\perp_{Lw_i}, \top_{Lw_i}]$.

On se situe donc ici dans un cas particulier du langage d'expression de préférences proposé dans [LAF 00]. Nous verrons en section 7 que ce langage simple suffit plus que largement à satisfaire les besoins de notre application. Pour des langages d'expression de préférences plus sophistiqués, voir [BOU 01].

Exemple 3 (suite) *Chaque agent* i *demande un certain nombre de photographies sans préférence particulière :* $\Delta_i = \{\langle o_1^i, 1\rangle, \ldots, \langle o_{|F_i|}^i, 1\rangle\}$*. L'utilité individuelle d'un agent* $ua_i(\mathbf{x})$ *est – comme dans l'exemple du gâteau – le nombre d'objets (ici, de photographies) qui lui sont attribués. On travaille donc encore avec* $Lw_i = \{0, 1\}$*, et avec* $Lua_i = \{0, \ldots, |F_i|\}$*. La différence essentielle avec l'exemple du gâteau vient de la nature des contraintes. Les données sont les suivantes :*

$\mathcal{O} = \{o_1, \ldots, o_7\}$ *;* $N = 2$ *; pour tout* $o_i \in \mathcal{O}$*, on introduit la variable propositionnelle* a_i *qui signifie «l'objet* o_i *est attribué à l'un des agents» ;*

$\mathcal{C} = \{\neg(a_1 \wedge a_2), \neg(a_1 \wedge a_7), \neg(a_3 \wedge a_6), a_1 \vee a_2 \rightarrow \neg(a_3 \wedge a_4 \wedge a_5)\}$ *: on ne peut attribuer à la fois* o_1 *et* o_2*,* o_1 *et* o_7*,* o_3 *et* o_6*, et si on attribue* o_1 *ou* o_2*, alors on ne peut attribuer en même temps* o_3, o_4 *et* o_5 *;*

$\Delta_1 = \{\langle o_1, 1\rangle, \langle o_3, 1\rangle, \langle o_5, 1\rangle\}$ *;* $\Delta_2 = \{\langle o_2, 1\rangle, \langle o_4, 1\rangle, \langle o_5, 1\rangle, \langle o_6, 1\rangle, \langle o_7, 1\rangle\}$.
On peut noter qu'individuellement, les demandes des agents sont cohérentes avec $\mathcal{C}$*, mais que conjointement, elles ne le sont plus. Les partages admissibles non dominés – ceux que l'on ne peut pas améliorer pour au moins un agent sans diminuer la satisfaction des autres – sont :*

$\mathbf{x} = \langle\{o_5\}, \{o_2, o_4, o_5, o_6, o_7\}\rangle \mapsto \langle 1, 5\rangle$,
$\mathbf{y} = \langle\{o_3, o_5\}, \{o_2, o_5, o_7\}\rangle \mapsto \langle 2, 3\rangle$,
$\mathbf{z} = \langle\{o_1, o_5\}, \{o_4, o_5, o_6\}\rangle \mapsto \langle 2, 3\rangle$,
$\mathbf{t} = \langle\{o_1, o_3, o_5\}, \{o_5\}\rangle \mapsto \langle 3, 1\rangle$.
Les profils de satisfaction associés sont indiqués après la flèche. On remarque que puisqu'il n'y a pas de contraintes de préemption, un même objet (par exemple, o_5*) peut être attribué à plusieurs agents.*

Dans cet exemple, les demandes sont élémentaires, mais notre langage permet aussi de coder des objectifs dépendants : par exemple, la demande $\langle o_3 \wedge o_1, w\rangle$ (où $w > \perp_{Lw_i}$) dénote des objets indissociables (l'agent désire o_1 et o_3, sachant qu'obtenir l'un sans l'autre ne lui est d'aucune utilité), et la demande $\langle o_4 \vee o_5 \vee o_6, w\rangle$ (où $w > \perp_{Lw_i}$) dénote des objets interchangeables (un seul objet parmi les trois lui convient).

Les dépendances qui, comme dans le cas des objets interchangeables, vérifient qu'une combinaison d'objets « vaut moins » que la somme – ou éventuellement une autre fonction d'agrégation – de ce que valent les objets individuellement, sont appelées **négatives** (elles traduisent une dégressivité, ou encore une redondance). Celles qui, comme dans le cas des objets indissociables, vérifient qu'une combinaison d'objets « vaut plus » que la somme de ce que valent les objets individuellement, sont appelées **positives** (elles traduisent un renforcement). Il existe des types de dépendances plus complexes, qui sont à la fois positives et négatives selon les objets impliqués, comme on peut le voir dans l'exemple suivant :

Exemple 7 *Considérons un problème d'achat de biens collectifs comme à l'exemple 5. Il s'agit d'acheter un certain ensemble de biens comestibles pour élaborer un repas ; soit $\mathcal{O} = \{pat, ab, pe\}$ (pat pour « pâte à tarte », ab pour « abricots », pe pour « pêches ») et soit la demande de l'agent 1 (on ignore ici les demandes des autres agents) : $\Delta_1 = \{\langle pat \wedge (ab \vee pe), 2\rangle, \langle ab \vee pe, 2\rangle, \langle pat \wedge ab, 1\rangle\}$ et considérons que l'utilité individuelle de l'agent est calculée en sommant les poids des demandes satisfaites. La fonction d'utilité ua_1 induite par Δ_1 est alors la suivante :*

x_1	$ua_1(\langle x_1, \ldots\rangle)$	x_1	$ua_1(\langle x_1, \ldots\rangle)$
$\{pat, ab, pe\}$	*5*	$\{pat, ab\}$	*5*
$\{pat, pe\}$	*4*	$\{pat\}$	*0*
$\{pe, ab\}$	*2*	$\{pe\}$	*2*
$\{ab\}$	*2*	$\emptyset$	*0*

On remarque que l'agent a exprimé un renforcement entre la pâte à tarte et les fruits (abricots ou pêches) puisque les utilités de $\{pat, ab\}$ et de $\{pat, pe\}$ sont supérieures à l'utilité de la pâte à tarte seule (qui est nulle) additionnée de l'utilité des pêches ou des abricots seuls ; en outre, l'agent a exprimé que les abricots et les pêches sont interchangeables, et qu'il est de surcroît indifférent entre les abricots et les pêches s'il n'y a pas de pâte à tarte, et qu'il a une légère préférence pour les abricots s'il y en a.

5. Phase 1 : calcul de l'utilité individuelle

La fonction d'utilité individuelle d'un agent (définition 4) doit satisfaire quelques principes de base :

– $ua_i(\mathbf{x})$ ne doit dépendre que de ce que i obtient (ou n'obtient pas), mais pas de la satisfaction des autres agents : $x_i = y_i \implies ua_i(\mathbf{x}) = ua_i(\mathbf{y})$;

– $ua_i(\mathbf{x})$ est minimale si $\mathbf{x}$ ne satisfait aucune demande de i : $Sat_i(\mathbf{x}) = \emptyset \implies ua_i(\mathbf{x}) = \bot_{Lua_i}$;

– $ua_i(\mathbf{x})$ est maximale si $\mathbf{x}$ satisfait toutes les demandes de i : $Sat_i(\mathbf{x}) = F_i \implies ua_i(\mathbf{x}) = \top_{Lua_i}$;

– puisque l'on ne peut exprimer que des demandes positives, l'utilité individuelle doit être une fonction monotone croissante : $Sat_i(\mathbf{x}) \subseteq Sat_i(\mathbf{y}) \implies ua_i(\mathbf{x}) \leq ua_i(\mathbf{y})$. Souvent même on voudrait qu'elle augmente strictement avec le nombre de demandes satisfaites : $Sat_i(\mathbf{x}) \subsetneq Sat_i(\mathbf{y}) \implies ua_i(\mathbf{x}) < ua_i(\mathbf{y})$ – on parle alors de monotonie stricte ou de « **principe d'efficacité** ».

Deux approches duales sont *a priori* possibles, selon que l'on vise à maximiser l'ensemble des demandes importantes (c'est-à-dire dont le poids associé est élevé) satisfaites ou à minimiser l'ensemble des demandes importantes non satisfaites.

5.1. *Maximisation des demandes satisfaites*

Lorsque les demandes expriment des désirs, le degré de satisfaction d'un agent ne dépend que du poids de ses demandes satisfaites. La façon la plus générale de traduire ceci, tout en tenant compte des principes énoncés ci-dessus, consiste à définir l'utilité individuelle d'un agent comme une fonction

$$ua_i(\mathbf{x}) = f_i(\langle w^i_{s_1}, \ldots, w^i_{s_m} \rangle)$$

où les w_{s_k} sont les poids des demandes de Δ_i qui sont satisfaites, avec f_i monotone croissante sur les w_{s_k} et telle que $f_i(\langle\rangle) = \bot_{Lua_i}$. D'un point de vue algorithmique, il est commode – sinon indispensable – d'agréger ces poids par un processus itératif, c'est-à-dire en combinant ces poids successivement, par une loi de composition binaire. Naturellement, cette loi doit être commutative et associative, garantissant ainsi que l'utilité d'un partage pour un agent ne dépend pas de l'ordre dans lequel on considère les demandes satisfaites. Le plus simple est alors de considérer que Lua_i (l'échelle des utilités de l'agent) est un surensemble de Lw_i (l'échelle sur laquelle il donne les poids), de même élément minimum $\bot_{Lua_i} = \bot_{Lw_i}$, élément neutre de la loi. En d'autres termes, on peut simplement poser :

$$ua_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bot_{Lua_i} \text{ si } Sat_i(\mathbf{x}) = \emptyset, \\ \oplus\{w \mid \langle \varphi, w \rangle \in \Delta_i \text{ et } x_i \models \varphi\} \text{ sinon,} \end{cases}$$

où $\oplus$ est une **conorme** sur $Lua_i = [\bot_{Lua_i}, \top_{Lua_i}]$, c'est-à-dire une loi de composition associative et commutative de Lua_i dans Lua_i, d'élément neutre $\bot_{Lua_i}$, monotone croissante ($a \geq b \implies a \oplus c \geq b \oplus c$), d'élément absorbant $\top_{Lua_i}$ (cette dernière propriété découle en fait des précédentes). Elle est dite strictement monotone si de plus $a > b \implies a \oplus c > b \oplus c$, pour tout $c \neq \top_{Lua_i}$. Typiquement, on peut prendre $a \oplus b = \max(a, b)$ sur $Lw_i = Lua_i = [0, 1]$, ou encore $a \oplus b = a + b - a \cdot b$ (on parle de « somme probabiliste »). Avec $Lw_i = Lua_i = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on peut prendre $\oplus = +$ ou $\max$. Tout dépend en fait des propriétés que l'on souhaite voir à l'agrégateur. Par exemple, $\max$ est idempotente ($\max(a, a) = a$), mais ne respecte pas le principe d'efficacité [5]. Le principe d'efficacité est en revanche respecté par la somme ou la somme probabiliste, et plus largement par toutes les conormes strictement monotones, si $\top_{Lua_i}$ n'est attribué à aucune demande :

Proposition 9 *Si $\oplus$ est strictement monotone et si $w < \top_{Lua_i}$ pour tout $\langle\varphi, w\rangle \in \Delta_i$, alors $Sat_i(\mathbf{x}) \subsetneq Sat_i(\mathbf{y}) \implies ua_i(\mathbf{x}) < ua_i(\mathbf{y})$.*

Preuve : par induction sur l'ensemble $Sat_i(\mathbf{y})$. Les hypothèses d'induction sont $ua_i(\mathbf{y}) = ua_i(\mathbf{x}) \oplus w,\ ua_i(\mathbf{x}) < \top_{Lua_i},\ \bot_{Lua_i} < w < \top_{Lua_i}$. Elles sont vérifiées lorsque $Sat_i(\mathbf{x}) = \emptyset$. Les conclusions à prouver sont $ua_i(\mathbf{x}) < ua_i(\mathbf{y})$ et $ua_i(\mathbf{y}) < \top_{Lua_i}$. De $\bot_{Lua_i} < w$ et de $ua_i(\mathbf{x}) \neq \top_{Lua_i}$ on tire, grâce à la stricte monotonie $ua_i(\mathbf{x}) \oplus \bot_{Lua_i} < ua_i(\mathbf{x}) \oplus w$, soit $ua_i(\mathbf{x}) < ua_i(\mathbf{y})$. D'autre part, de $ua_i(\mathbf{x}) < \top_{Lua_i}$ et $w < \top_{Lua_i}$ on tire grâce à la stricte monotonie $uai(\mathbf{x}) \oplus w < \top_{Lua_i} \oplus w = \top_{Lua_i}$, soit $ua_i(\mathbf{y}) < \top_{Lua_i}$. □

Une alternative se présente donc, dont il faut bien saisir la portée :

– soit on autorise le poids $\top_{Lua_i}$, élément absorbant de la loi, pour noter des demandes « idéales » (cf. section 4.2) ce qui signifie que l'utilité de l'agent peut être maximale alors que toutes ses demandes n'ont pas été satisfaites : on peut avoir $Sat_i(\mathbf{x}) \subsetneq Sat_i(\mathbf{y})$ et $ua_i(\mathbf{x}) = ua_i(\mathbf{y})$, autrement dit le principe d'efficacité n'est plus totalement respecté ;

– soit $\top_{Lua_i}$ n'est pas autorisé pour noter le poids des demandes. Conformément à la proposition précédente, le principe d'efficacité sera respecté si la loi est strictement monotone croissante.

5.2. *Minimisation des demandes insatisfaites*

Lorsque les demandes expriment des besoins, on mesure l'intérêt des partages en fonction d'une désutilité qui ne dépend que de l'utilité des demandes *non satisfaites*. La désutilité – que l'on cherchera à minimiser – est une fonction croissante de ces demandes :

$$da_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bot_{Lua_i} \text{ si } Sat_i(\mathbf{x}) = F_i, \\ \oplus\{w \mid \langle\varphi, w\rangle \in \Delta_i \text{ et } x_i \nvDash \varphi\} \text{ sinon,} \end{cases}$$

où $\oplus$ est une conorme sur Lua_i, avec $da_i(\mathbf{x}) = \bot_{Lua_i}$ lorsque toutes les demandes sont satisfaites.

La minimisation des demandes insatisfaites peut s'exprimer sous la forme d'une utilité à maximiser, en posant :

$$ua_i(\mathbf{x}) = n(da_i(\mathbf{x})) = \otimes\{R(w) \mid \langle\varphi, w\rangle \in \Delta_i \text{ et } x_i \nvDash \varphi\},$$

5. Par exemple, sur l'échelle $[0, 1]$, supposons que i ait déposé trois demandes de poids $\frac{1}{5}$. Il est évident que $\max(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \not> \max(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ et donc que, quand $\oplus = \max$, l'utilité d'un partage attribuant trois objets sur les trois demandés n'est pas supérieure à l'utilité d'un partage n'en accordant que deux.

R étant une fonction de renversement d'ordre, c'est-à-dire une fonction de L dans lui-même telle que $R(\top) = \bot$, $R(\bot) = \top$, $a \geq b \iff R(b) \geq R(a)$. $\otimes$ est par conséquent la norme associée à $\oplus$ [6].

Comme précédemment l'utilisation du poids $\top_{Lua_i}$ est à manier avec précaution : absorbant pour $\oplus$, il peut dénoter des demandes « impératives » (cf. section 4.2). Ici aussi, le principe d'efficacité n'est respecté que par les lois strictement monotones et sous réserve que $\top_{Lua_i}$ ne soit attaché à aucune demande. Si c'était le cas, l'utilité de l'agent pourrait être minimale alors que toutes ses demandes n'ont pas été insatisfaites.

5.3. *Maximiser les demandes satisfaites ou minimiser les demandes insatisfaites ?*

Il est maintenant légitime de se demander s'il vaut mieux se tourner vers une maximisation des demandes satisfaites ou une minimisation des demandes insatisfaites. En pratique, nous pouvons montrer que, lorsque l'on utilise une conorme, les deux approches sont non seulement compatibles mais à peu près équivalentes du moment que la conorme utilisée est strictement monotone. En effet :

Proposition 10 *Si ua_i et da_i sont définies par la même conorme $\oplus$, alors, pour toute paire $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Adm(\pi)$: $ua_i(\mathbf{x}) < ua_i(\mathbf{y})$ et $da_i(\mathbf{x}) < da_i(\mathbf{y})$ sont incompatibles.*

Preuve : puisque $\oplus$ est monotone et croissante, $b \geq c \implies a \oplus b \geq a \oplus c$, ce qui s'écrit aussi $a \oplus b < a \oplus c \implies b < c$. Soit maintenant les ensembles $A = \oplus\{w \mid \langle\varphi, w\rangle \in \Delta_i,\ x_i \models \varphi \text{ et } y_i \models \varphi\}$, $B = \oplus\{w \mid \langle\varphi, w\rangle \in \Delta_i,\ x_i \models \varphi \text{ et } y_i \not\models \varphi\}$, $C = \oplus\{w \mid \langle\varphi, w\rangle \in \Delta_i,\ x_i \not\models \varphi \text{ et } y_i \models \varphi\}$, $D = \oplus\{w \mid \langle\varphi, w\rangle \in \Delta_i,\ x_i \not\models \varphi \text{ et } y_i \not\models \varphi\}$. La loi $\oplus$ étant associative et commutative, $ua_i(\mathbf{x}) = A \oplus B$, $ua_i(\mathbf{y}) = A \oplus C$, $da_i(\mathbf{x}) = D \oplus C$, $da_i(\mathbf{y}) = D \oplus B$. Supposons $ua_i(\mathbf{x}) = A \oplus B < ua_i(\mathbf{y}) = A \oplus C$. Ceci implique $B < C$. De même, supposons $da_i(\mathbf{x}) = D \oplus C < da_i(\mathbf{y}) = D \oplus B$, ce qui implique $C < B$. Nos deux suppositions sont donc incompatibles. □

Ce qui signifie que soit les deux approches préconisent le même classement de deux partages, soit l'une les considère comme *ex aequo* alors que l'autre possède une préférence stricte. Ce dernier cas advient si l'on admet que pour certains a, $a \oplus a$ (et donc $a \oplus b$, pour tout $b \leq a$) puisse être égal à a. Prenons par exemple le cas de trois demandes, pondérées sur l'échelle $[0, 1]$: $\Delta_i = \{\langle o_1, 0{,}8\rangle, \langle o_2, 0{,}7\rangle, \langle o_3, 0{,}6\rangle\}$, et considérons le partage $\mathbf{x}$ où $x_i = \{o_1\}$ et le partage $\mathbf{y}$ tel que $y_i = \{o_1, o_2\}$. Quelle que soit la conorme utilisée, on aura $ua_i(\mathbf{y}) \geq ua_i(\mathbf{x})$ et $da_i(\mathbf{y}) \leq da_i(\mathbf{x})$. Mais il peut arriver que $ua_i(\mathbf{x}) = ua_i(\mathbf{y})$ et $da_i(\mathbf{y}) < da_i(\mathbf{x})$. Ce sera typiquement le cas

6. Une norme est une loi de composition associative et commutative sur L, monotone croissante, d'élément neutre $\top$ et d'élément absorbant $\bot$. Si $\oplus$ est une conorme et R un renversement d'ordre, la loi définie par $a \otimes b = R(R(a) \oplus R(b))$ est en effet une norme (la norme associée à $\oplus$) et réciproquement, si $\otimes$ est une norme, la loi définie par $a \oplus b = R(R(a) \otimes R(b))$ est une conorme (la conorme associée à $\otimes$).

dans notre exemple avec $\oplus = \max$. Nous avons en effet $ua_i(\mathbf{x}) = ua_i(\mathbf{y}) = 0{,}8$ et $da_i(\mathbf{x}) = 0{,}7 > da_i(\mathbf{y}) = 0{,}6$. Ce type d'exemple ne peut être construit qu'avec des conormes qui ne sont pas strictement monotones.

Proposition 11 *Si ua_i et da_i sont définies par la même conorme $\oplus$ strictement monotone, sur $[\bot_{Lua_i}, \top_{Lua_i}]$, et qu'aucune demande n'est d'utilité $\top_{Lua_i}$ (c'est-à-dire $w < \top_{Lw_i}$ pour tout $\langle w, \varphi \rangle \in \Delta_i$), alors pour toute paire $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Adm(\pi)$ on a : $ua_i(\mathbf{x}) > ua_i(\mathbf{y}) \iff da_i(\mathbf{x}) < da_i(\mathbf{y})$.*

Preuve : la preuve est similaire à la preuve de la proposition précédente. Lorsque $\oplus$ est strictement monotone, et que $a \neq \top_{Lw_i}$, on montre que $b > c \iff a \oplus b > a \oplus c$. Donc $A \oplus B > A \oplus C \iff B > C \iff D \oplus B > D \oplus C$, donc $ua_i(\mathbf{x}) > ua_i(\mathbf{y}) \iff da_i(\mathbf{y}) > da_i(\mathbf{x})$. □

En d'autres termes, lorsque la conorme utilisée est strictement monotone, maximisation des demandes satisfaite et minimisation des insatisfaites sont deux approches équivalentes – on peut de façon équivalente choisir de considérer les utilités des demandes satisfaites ou les utilités des demandes insatisfaites.

5.4. *Normalisation des utilités individuelles*

Pour être équitable, l'arbitre doit pouvoir comparer entre elles les utilités reçues par les différents agents. Il est donc nécessaire d'évaluer ces utilités sur une même échelle. De plus cette échelle doit être telle que, pour n'importe quel agent, son utilité soit minimale quand il ne reçoit aucune de ses demandes, et maximale quand il les reçoit toutes. Or ce dernier principe ne peut pas être vérifié *stricto sensu* par les fonctions d'utilité construites sur des conormes strictement monotones : si toutes les demandes sont satisfaites et de poids $w < \top_{Lua_i}$, alors l'agrégation résultante est strictement inférieure à $\top_{Lua_i}$.

Une manière simple de résoudre ces problèmes est d'utiliser une évaluation numérique des poids et des utilités et de normaliser les utilités individuelles : *in fine*, l'utilité de $\mathbf{x}$ pour l'agent i est la proportion de ses demandes compatibles qu'il voit satisfaites, pondérée par l'importance relative des demandes. Puisque la normalisation exige une division, le plus simple est d'évaluer les poids sur $Lw_i = \{\bot_{Lw_i} = 0, 1, \ldots, \top_{Lw_i}\} \subset \mathbb{N}$ et de choisir comme échelle commune l'intervalle $Lua = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ (en fait il suffirait de $\mathbb{Q} \bigcap [0, 1]$).

Définition 12 **L'utilité individuelle normalisée d'un agent** *i est une fonction ua'_i de $Adm(\pi)$ dans $Lua = [0, 1]$ définie par :*

$$ua'_i(\mathbf{x}) = ua_i(\mathbf{x}) / ua^*_i$$

– $ua_i(\mathbf{x}) = \oplus\{w \mid \langle \varphi, w \rangle \in \Delta_i, x_i \models \varphi\}$ est l'utilité individuelle de i avec les poids w choisis dans $Lw_i = \{\bot_{Lw_i} = 0, 1, \ldots, \top_{Lw_i}\} \subset \mathbb{N}$;

– $Lua_i = [\bot_{Lua_i}, \top_{Lua_i}]$ *est un surensemble de* Lw_i*, de même élément minimal* $\bot_{Lua_i} = \bot_{Lw_i} = 0$ *;*

– $\oplus$ *est une conorme sur* Lua_i *;*

– $ua_i^* = \max_{\mathbf{y} \in Adm(\pi)} ua_i(\mathbf{y})$.

La quantité ua_i^* est l'utilité individuelle maximale que l'agent i pourrait obtenir s'il était seul. Lorsque l'agent spécifie correctement sa part idéale, c'est-à-dire lorsqu'il pose un ensemble de demandes compatibles entre elles, $ua_i^* = \oplus\{w \mid \langle\varphi, w\rangle \in \Delta_i\}$.

D'autre part, on peut normaliser *a priori* les utilités individuelles au lieu de le faire *a posteriori*, en imposant pour chacun ce maximum ua_i^* à une valeur qui soit commune pour tous. Par exemple, en donnant aux agents un « budget » de K points à répartir sur leurs demandes ($\oplus = +$), ou en demandant un ordre de priorité sur les demandes et en attribuant automatiquement les utilités. Si les demandes des agents sont toujours compatibles, il ne sera plus alors nécessaire de normaliser.

Exemple 3 (suite) *Chaque agent a demandé un certain nombre de photographies sans préférence particulière et les partages admissibles non dominés étaient :*
$\mathbf{x} = \langle\{o_5\}, \{o_2, o_4, o_5, o_6, o_7\}\rangle \mapsto \langle 1, 5\rangle$,
$\mathbf{y} = \langle\{o_3, o_5\}, \{o_2, o_5, o_7\}\rangle \mapsto \langle 2, 3\rangle$,
$\mathbf{z} = \langle\{o_1, o_5\}, \{o_4, o_5, o_6\}\rangle \mapsto \langle 2, 3\rangle$,
$\mathbf{t} = \langle\{o_1, o_3, o_5\}, \{o_5\}\rangle \mapsto \langle 3, 1\rangle$.

Si l'on mesurait l'utilité collective d'un partage par le nombre total d'objets attribués (critère utilitariste), alors $\mathbf{x}$ *serait le meilleur partage puisqu'il attribue 6 objets. Cependant, ce partage n'apparaît pas équitable. Pour construire un critère d'utilité collective mesurant le « degré d'équité », on ramène chaque utilité individuelle à une même échelle en proposant pour cela de compter, pour utilité individuelle de chaque agent, non pas le nombre absolu d'objets lui ayant été attribués, mais la* **proportion** *d'objets attribués par rapport à sa demande totale – c'est l'***utilité individuelle normalisée***. On obtient alors les nouveaux profils de satisfaction suivants :*
$\mathbf{x} = \langle\{o_5\}, \{o_2, o_4, o_5, o_6, o_7\}\rangle \mapsto \langle \frac{1}{3}, 1\rangle$,
$\mathbf{y} = \langle\{o_3, o_5\}, \{o_2, o_5, o_7\}\rangle \mapsto \langle \frac{2}{3}, \frac{3}{5}\rangle$,
$\mathbf{z} = \langle\{o_1, o_5\}, \{o_4, o_5, o_6\}\rangle \mapsto \langle \frac{2}{3}, \frac{3}{5}\rangle$,
$\mathbf{t} = \langle\{o_1, o_3, o_5\}, \{o_5\}\rangle \mapsto \langle 1, \frac{1}{5}\rangle$.

Quel partage apparaît finalement comme le plus équitable ? On peut choisir celui qui maximise l'utilité individuelle de l'agent le plus défavorisé (critère égalitariste). De ce point de vue, $\mathbf{y}$ *et* $\mathbf{z}$ *sont équivalents ; même l'utilité reçue par le second agent (le plus favorisé) ne peut les départager.*

6. Phase 2 : recherche de partages efficaces et équitables

Focalisons-nous maintenant sur la seconde phase qui vise à répartir les objets entre les agents et rappelons notre hypothèse de départ : les préférences de la collectivité (incarnée par un arbitre) sont représentées par une fonction d'utilité collective uc :

$Adm(\pi) \mapsto L$ et on recherche un partage maximisant cette fonction, qui doit respecter des principes de base :

– l'utilité $uc(\mathbf{x})$ d'un partage $\mathbf{x}$ doit bien entendu dépendre directement du profil de satisfaction $\langle ua_1(\mathbf{x}), \ldots, ua_n(\mathbf{x})\rangle$ – c'est une fonction de Lua^n dans L.

– uc doit exprimer une préférence pour les partages qui maximisent les utilités individuelles : il doit respecter les principes d'efficacité collective, ce qui impose, nous le verrons dans la section suivante, que uc soit une fonction croissante de ses arguments.

– uc doit être équitable vis-à-vis des différents agents. Nous avons déjà vu à la section 5.4 que l'équité implique la nécessité d'échelles d'utilités individuelles Lua_i comparables. L'équité implique aussi, nous le verrons dans la section 6.2, que la fonction traite symétriquement ses arguments, autrement dit qu'elle soit commutative.

On ne peut sélectionner les partages sur la seule base de leur parfaite équité (si c'était le cas, il suffirait par exemple de ne satisfaire aucune demande) ou de leur parfaite d'efficacité (on pourrait alors servir complètement les agents à tour de rôle, le premier ne laissant aux suivants que ce qui ne l'intéresse pas, ce qui est parfaitement inéquitable). Toute la question est alors de déterminer des fonctions d'utilité collective équitables et qui respectent le principe d'efficacité.

Ces deux exigences sont définies et étudiées en détail dans les deux prochaines sections. Pour simplifier, on notera $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ les éléments de Lua^n (en un sens, on identifie un partage et son profil de satisfaction). On notera donc x_i la composante numéro i du vecteur des utilités individuelles associé à $\mathbf{x}$ (on identifie x_i – la part de i dans le partage $\mathbf{x}$ – et son utilité individuelle $ua_i(\mathbf{x})$).

6.1. *Recherche de partages efficaces*

Le principe d'efficacité collective, et sa version faible, le principe d'unanimité se définissent à partir de la notion de domination :

Définition 13 (Domination) *Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de E^n, où E est un ensemble ordonné. On note*

– $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ *si et seulement si* $u_i \geq v_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$

– $\mathbf{u} > \mathbf{v}$ *si et seulement si* $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ *et* $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$

– $\mathbf{u} \gg \mathbf{v}$ *si et seulement si* $u_i > v_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$.

Dans le second cas ($\mathbf{u} > \mathbf{v}$*) on dit que* $\mathbf{u}$ *domine* $\mathbf{v}$.

Définition 14 (Unanimité ou principe de Pareto faible) *La fonction d'utilité collective uc respecte le principe d'unanimité si et seulement si :*

$\langle ua_1(\mathbf{x}), \ldots, ua_n(\mathbf{x})\rangle \geq \langle ua_1(\mathbf{y}), \ldots, ua_n(\mathbf{y})\rangle \implies uc(\mathbf{x}) \geq uc(\mathbf{y})$

$\langle ua_1(\mathbf{x}), \ldots, ua_n(\mathbf{x})\rangle \gg \langle ua_1(\mathbf{y}), \ldots, ua_n(\mathbf{y})\rangle \implies uc(\mathbf{x}) > uc(\mathbf{y})$

Définition 15 (Efficacité collective ou principe de Pareto strict) *La fonction d'utilité collective uc respecte le principe d'efficacité si et seulement si :*
$\langle ua_1(\mathbf{x}), \ldots, ua_n(\mathbf{x})\rangle > \langle ua_1(\mathbf{y}), \ldots, ua_n(\mathbf{y})\rangle \implies uc(\mathbf{x}) > uc(\mathbf{y})$

L'unanimité impose que uc soit une fonction monotone croissante en ses arguments. L'efficacité impose que uc soit strictement croissante en ses arguments. L'utilité collective uc sera donc une fonction croissante (strictement croissante si l'on veut respecter le principe de Pareto strict) de $Lua^n = [0,1]^n$ dans L, minimale pour le vecteur $\langle 0, \ldots, 0\rangle$ et maximale pour $\langle 1, \ldots, 1\rangle$.

Pour le choix de la fonction d'agrégation utilisée pour le calcul de l'utilité collective à partir des utilités individuelles, on requiert simplement la commutativité et la non-décroissance. On voit que les normes et conormes (qui sont en outre associatives) sont des fonctions satisfaisantes ; il faut remarquer cependant que si le principe de Pareto faible est respecté par toutes les normes et toutes les conormes, le principe d'efficacité n'est, lui, respecté que par les fonctions strictement monotones – et sous réserve que l'élément absorbant ne soit présent sur aucune composante du vecteur (qu'aucun agent ne reçoive aucune de ses demandes, pour les normes, qu'aucun ne les reçoive toutes, pour les conormes).

Les normes et conormes ne sont toutefois pas les seules fonctions satisfaisantes. D'autres agrégateurs sont en effet possibles, par exemple les *Ordered Weighted Averaging operators* (OWA)[YAG 88], qui généralisent la moyenne. L'idée est de pondérer les utilités individuelles relativement à leur rang.

Définition 16 (OWA) *Soit un vecteur $w = \langle w_1, \ldots, w_n\rangle$[7]. L'OWA induit par w est la fonction d'agrégation $O_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie comme suit : considérons un profil de satisfaction $\mathbf{x} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in [0,1]^n$ et soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq x_{\sigma(n)}$; alors $O_w(\mathbf{x}) = w_1.x_{\sigma(1)} + \cdots + w_n.x_{\sigma(n)}$.*

Par exemple, si $w = \langle 1/n, \ldots, 1/n\rangle$, on retrouve la moyenne, si $w = \langle 0, 1/(n-2), \ldots, 1/(n-2), 0\rangle$, on obtient la moyenne des utilités individuelles une fois retranchée la meilleure et la moins bonne. On peut également faire la moyenne des k meilleures, etc. Les OWA peuvent également coder des ordres très qualitatifs, par exemple le $\min$ ($w = \langle 1, 0, \ldots, 0\rangle$), le $\max$ ($w = \langle 0, 0, \ldots, 1\rangle$). Si tous les w_i sont strictement positifs, l'ordre induit par O_w respecte toujours le principe d'efficacité. De même, il est facile de voir que les OWA respectent le principe de symétrie.

Citons enfin les ordres leximin et leximax ([MOU 88]), qui sont des raffinements efficaces (ils respectent le principe d'efficacité) de l'agrégation par min et par max, respectivement. Ces deux ordres consistent à comparer deux vecteurs en comparant leur élément minimum (maximum pour le leximax), une fois retranchées les valeurs identiques, qui se compensent une à une : techniquement, on classe chaque vecteur par

7. Habituellement on requiert que w soit normalisé, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Cette condition n'est cependant pas indispensable pour notre problème, puisque seul l'ordre induit par l'OWA est pertinent.

ordre croissant (décroissant pour le leximax), puis l'ordre de préférence collective – le meilleur vecteur venant en premier – est obtenu en classant ces vecteurs ordonnés par ordre lexicographique décroissant, d'où le nom «lexi»-min (max). Exemples :

$\langle 0{,}1, 0{,}2, 0{,}8\rangle >_{\text{leximin}} \langle 0{,}1, 0{,}9, 0{,}1\rangle$,
$\langle 0{,}1, 0{,}2, 0{,}8\rangle <_{\text{leximax}} \langle 0{,}1, 0{,}9, 0{,}1\rangle$
$\langle 0{,}1, 0{,}2, 0{,}8\rangle =_{\text{leximin}} \langle 0{,}2, 0{,}8, 0{,}1\rangle$,
$\langle 0{,}1, 0{,}4, 0{,}5, 0{,}7\rangle <_{\text{leximin}} \langle 0{,}1, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}7\rangle$.

On peut montrer ([DUB 96]) que ces ordres consistent, pour comparer deux partages, à compter, pour chaque niveau de satisfaction possible, le nombre d'agents satisfaits à ce niveau par un partage et par l'autre. Le leximax commence par les plus hauts niveaux de satisfaction et privilégie le vecteur qui le premier domine l'autre en termes de nombre d'agents satisfaits (maximisation du nombre d'agents satisfaits). Le leximin commence par les niveaux de faible satisfaction et élimine le vecteur qui le premier accorde un petit niveau de satisfaction à un plus grand nombre d'agents (minimisation du nombre d'agents insatisfaits). Formellement :

Définition 17 (leximin, leximax)
$\mathbf{x} \geq_{\text{leximax}} \mathbf{y} \iff \exists\alpha \in [0,1], \forall\beta > \alpha, Card(\{x_i \mid x_i = \beta\}) = Card(\{y_i \mid y_i = \beta\})$ *et* $Card(\{x_i \mid x_i = \alpha\}) \geq Card(\{y_i \mid y_i = \alpha\})$.

$\mathbf{x} \geq_{\text{leximin}} \mathbf{y} \iff \exists\alpha \in [0,1], \forall\beta < \alpha, Card(\{x_i \mid x_i = \beta\}) = Card(\{y_i \mid y_i = \beta\})$ *et* $Card(\{x_i \mid x_i = \alpha\}) \geq Card(\{y_i \mid y_i = \alpha\})$.

Il a été montré ([MOU 88]) que, sur une échelle continue, on ne peut pas encoder l'ordre leximin, ou l'ordre leximax, par une fonction d'utilité ; cependant, cette restriction ne s'applique pas lorsque les échelles sont finies – ces ordres peuvent alors être codés par exemple par des OWA ([YAG 88, DUB 97]) – par exemple, sur $Lua = [0,1]$, on utilisera $w = \langle 1/(\epsilon^n), 1/(\epsilon^{n-1})), \ldots, 1/\epsilon\rangle$ pour le leximin et $w = \langle 1/\epsilon, \ldots, 1/(\epsilon^{n-1}), 1/(\epsilon^n)\rangle$ pour le leximax, ϵ étant une borne inférieure du plus petit écart entre deux utilités individuelles.

6.2. *Recherche de partages équitables*

L'exigence d'équité vis-à-vis des différents agents a plusieurs conséquences notables. Nous avons vu qu'elle implique évidemment que les utilités individuelles soient comparables, ce qui nous a poussés à utiliser dans les profils de satisfaction des utilités individuelles normalisées. Une autre conséquence notable de l'exigence d'équité est que les agents doivent être traités de manière égale et symétrique, donc que les arguments de uc peuvent être commutés. C'est le **principe de symétrie**.

Définition 18 *La fonction d'utilité collective* $uc : Lua^n \to L$ *satisfait le principe de symétrie si et seulement si, pour tout* $i, j \in 1 \ldots n$ *et pour toute paire de vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *telle que* $x_i = y_j$, $x_j = y_i$ *et* $x_k = y_k \forall k \neq i, j$, *on a* $uc(\mathbf{x}) = uc(\mathbf{y})$.

Ce principe est respecté par toutes les opérations et fonctions d'utilité que nous avons présentées dans les sections précédentes.

Enfin, le principe de **réduction des inégalités** de Pigou-Dalton [MOU 88, page 45] permet de fonder l'équité sur la notion de transfert d'utilité : diminuer l'écart de satisfaction entre deux agents par un transfert d'utilité du plus riche au plus pauvre ne doit pas réduire l'utilité collective. Formellement :

Définition 19 (Principe de Pigou-Dalton) *Soit* $uc : [0,1]^n \to L$ *une fonction d'utilité collective. La fonction* uc **n'accroît pas les inégalités** *si et seulement si, pour tout* $i, j \in 1 \ldots n$ *et pour toute paire de vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$*, on a :*

$$[x_k = y_k \forall k \neq i, j \text{ et } x_i + x_j = y_i + y_j \text{ et } |x_i - x_j| < |y_i - y_j|] \implies uc(\mathbf{x}) \geq uc(\mathbf{y}).$$

Elle **réduit les inégalités** *si et seulement si, sous les mêmes hypothèses, l'inégalité devient stricte (*$uc(\mathbf{x}) > uc(\mathbf{y})$*). Elle est* **indifférente aux inégalités** *si et seulement si*

$$x_k = y_k \forall k \neq i, j \text{ et } x_i + x_j = y_i + y_j \implies uc(\mathbf{x}) = uc(\mathbf{y}).$$

On dit que uc *respecte le principe de Pigou-Dalton si elle n'accroît pas les inégalités, et le respecte strictement si elle réduit les inégalités.*

Proposition 20 *Le* max *ne réduit pas les inégalités. La somme (*$+$*), le* min*, le* leximin*, et le produit (*$\cdot$*) n'accroissent pas les inégalités. La somme (*$+$*) est indifférente aux inégalités. Le produit (*$\cdot$*) réduit les inégalités si la valuation absorbante n'est pas présente. Le* leximin *réduit les inégalités*[8].

Preuve : le max ne réduit pas les inégalités. Considérons les profils $\mathbf{x} = \langle 0{,}7, 0{,}2, 0{,}1\rangle$ et $\mathbf{y} = \langle 0{,}8, 0{,}1, 0{,}1\rangle$. Nous avons $= 0{,}7+0{,}2 = 0{,}8+0{,}1$ et $0{,}7-0{,}2 < 0{,}8-0{,}1$, mais $\max(0{,}7, 0{,}2, 0{,}1) < \max(0{,}8, 0{,}1, 0{,}1)$: réduire l'inégalité entre les deux premiers agents fait diminuer strictement l'utilité collective. La somme ($+$) est indifférente aux inégalités et donc ne les accroît pas. $x_i + x_j = y_i + y_j$ et $x_k = y_k, \forall k \neq i, j$ implique évidemment que $x_i + x_j + \Sigma x_k = y_i + y_j + \Sigma y_k$. Le $\min$ n'accroît pas les inégalités. Posons $a = \min(y_k, \forall k \neq i, j) = \min(x_k, \forall k \neq i, j)$ puisque $x_k = y_k, \forall k \neq i, j$. $y_i = y_j$ est incompatible avec $|x_i - x_j| < |y_i - y_j|$ (on aurait $0 > 0$). Quand $y_i > y_j$, $x_i + x_j = y_i + y_j$ et $|x_i - x_j| < |y_i - y_j|$ signifie que $y_i > x_i > y_j$ et $y_i > x_j > y_j$. Par conséquent, $\min(y_i, y_j) = y_j < \min(x_i, x_j)$ et donc $\min(y_i, y_j, a) \leq \min(x_i, x_j, a)$. Quand $y_j > y_i$, $y_j > x_i > y_i$ et $y_j > x_j > y_i$ et donc : $\min(y_i, y_j) = y_j < \min(x_i, x_j)$. Le $\min$ ne réduit pas forcément les inégalités. Lorsque $a < \min(x_i, y_i, x_j, y_j)$, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ont même utilité (a). Le leximin réduit les inégalités. Posons $a = \min(y_k, \forall k \neq i, j) = \min(x_k, \forall k \neq i, j)$ puisque $x_k = y_k, \forall k \neq i, j$. $y_i = y_j$ est incompatible avec $|x_i - x_j| < |y_i - y_j|$ (on aurait

8. On trouvera dans l'ouvrage [MOU 88, chapitre 2] des exemples de familles de fonctions d'utilité collective qui n'accroissent pas ou qui réduisent les inégalités, ainsi que deux caractérisations générales, assez techniques, de ce type de fonction. Par exemple, les fonctions $W_q(\mathbf{x}) = \mathrm{sgn}(q) \cdot \sum_{i \in N} x_i^q$, avec la convention $W_0(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \log x_i$ sont telles que W_q n'accroît pas les inégalités (les réduit) si et seulement si $-\infty < q \leq 1$ ($-\infty < q < 1$). D'une façon intéressante, cette famille connecte d'un côté une agrégation purement utilitariste (lorsque $q = 1$) et de l'autre une agrégation égalitariste tendant vers le leximin (lorsque $q \to -\infty$).

$0 > 0$). Quand $y_i > y_j$, $x_i + x_j = y_i + y_j$ et $|x_i - x_j| < |y_i - y_j|$ signifie que $y_i > x_i > y_j$ et $y_i > x_j > y_j$. Par conséquent, $\min(y_i, y_j) = y_j < \min(x_i, x_j)$. Comme les autres agents ont même utilité dans les deux vecteurs, l'ordre leximin va préférer x, de plus haut minimum sur les composantes qui diffèrent. Le raisonnement est similaire quand $y_j > y_i$. Le produit $\cdot$ n'accroît pas les inégalités et les réduit si $a = \Pi(y_k, \forall k \neq i, j) = \Pi(x_k, \forall k \neq i, j) > 0$. $y_i = y_j$ est incompatible avec $|x_i - x_j| < |y_i - y_j|$. Sans perte de généralité on peut supposer que $y_j < x_j \leq x_i < y_i$ avec $y_j = x_j - \epsilon$, $y_i = x_i + \epsilon$, et $\epsilon > 0$. On a alors $y_i \cdot y_j = x_i \cdot x_j - \epsilon \cdot (x_i - x_j) - \epsilon^2 < x_i \cdot x_j$. Si $a > 0$: $y_i \cdot y_j \cdot a < x_i \cdot x_j \cdot a$: les inégalités sont réduites. □

Peut-on pour autant montrer qu'aucune norme n'accroît les inégalités et qu'aucune conorme ne les réduit, que les normes sans valuation absorbante les réduisent ? Non. Voici un contre-exemple de norme qui accroît les inégalités : $x \otimes y = \frac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-xy)}$ avec $\gamma \geq 0$ (norme de Hamacher). Pour $\gamma = 5$ nous avons $\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2}$, tandis que $\frac{3}{4} \otimes \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$. Cette norme continue et strictement monotone permet d'approcher d'aussi près qu'on veut la norme discontinue et non strictement monotone définie par $x \otimes y = x$ si $y = 1,\ y$ si $x = 1, 0$ sinon, et qui évidemment accroît les inégalités.

Cette analyse de l'équité conduit donc à privilégier les comparaisons des profils de satisfaction basées sur des normes strictement monotones (comme le produit), qui sont à la fois équitables et efficaces (elles respectent le principe de Pareto strict), sous réserve qu'aucun agent ne soit totalement insatisfait (voit toutes ses demandes refusées). Plus ordinale puisqu'elle ne permet aucune compensation d'un niveau de satisfaction sur l'autre, la comparaison par le leximin est elle aussi efficace et strictement équitable, et ce dans toutes les circonstances.

7. Application au problème de partage de ressources satellitaires

Ce problème a été exposé en section 2. Sa particularité est d'enchaîner deux modes : d'abord un mode dit hiérarchique, fondé sur des priorités, puis un mode dit commercial, fondé sur des poids. Dans le mode hiérarchique, la contrainte limitant le nombre des demandes satisfaites à un nombre maximal autorisé est simplement une contrainte d'admissibilité qui doit être satisfaite dans ce mode. Nous considérons successivement ces deux modes pour le calcul de l'utilité individuelle (phase 1), puis ensemble pour le calcul de l'utilité collective (phase 2).

7.1. *Calcul des utilités individuelles : le principe de hiérarchie*

Dans le mode hiérarchique, le calcul des utilités individuelles doit obéir à un principe de hiérarchie (c'est l'une des spécifications du problème) : chaque agent est supposé hiérarchiser ses demandes, et il faut modéliser le fait que, pour chacune, la non-satisfaction d'une demande prioritaire ne peut pas être compensée par la satisfaction de demandes moins prioritaires, aussi nombreuses soient-elles.

Pour encoder cette règle, on proposera aux agents de valuer leurs demandes sur une échelle $Lw_i = \{1/2, 1/4, ..., 1/(2^{|\Delta_i|})\}$, en imposant que ne soit placée qu'une demande élémentaire (ou qu'une disjonction de demandes élémentaires interchangeables) par échelon de l'échelle : la k^{ieme} demande la plus importante de l'agent reçoit le poids $1/2^k$. L'utilité individuelle d'un partage pour un agent est fonction des priorités de ses demandes satisfaites (mais nous avons vu que, puisque nous voulons respecter le principe d'efficacité, et donc utiliser une loi strictement monotone, nous aurions pu tout aussi bien travailler sur les demandes non satisfaites) :

Définition 21 *Dans le mode hiérarchique, l'utilité individuelle de chaque agent est définie par :*

$$uah_i(\mathbf{x}) = \sum\{w^i_k \mid \langle\varphi^i_k, w^i_k\rangle \in \Delta_i \text{ et } x_i \models \varphi^i_k\}$$

où $\langle\varphi^i_k, w^i_k = 1/(2^k)\rangle$ *désigne la* $k^{ième}$ *demande de l'agent i, en ordre décroissant d'importance. L'utilité normalisée sur l'échelle* $L = [0, 1]$ *est définie par :*

$$uah'_i(\mathbf{x}) = uah_i(\mathbf{x})/uah^*_i, \text{ avec } uah^*_i = \max_{\mathbf{x}\in Adm(\pi)} uah_i(\mathbf{x})$$

Si l'on veut être tout à fait rigoureux, notons que l'on travaille en fait avec la conorme $x \oplus y = \min(1, x+y)$ sur une échelle commune $Lua = [0, 1]$, dont l'écriture a été simplifiée en $x \oplus y = x+y$, puisque chaque élément de Lw_i n'est associé qu'à une seule demande au plus et que donc $\sum\{w \mid w \in Lw_i\} = 1/2+1/4+\cdots+1/2^{|\Delta_i|} < 1$. On vérifiera aisément que, maximisant l'utilité $uah_i(\mathbf{x})$, on minimise également la désutilité $dah_i(\mathbf{x}) = \sum\{w^i_k \mid \langle\varphi^i_k, w^i_k\rangle \in \Delta_i$ et $x_i \not\models \varphi^i_k\}$.

Le mode hiérarchique est codé par une somme, mais est en réalité tout à fait ordinal car les poids ont été choisis de manière à n'autoriser aucune compensation : $1/2 > 1/4 + \cdots + 1/(2^k)$ et plus généralement $1/(2^l) > 1/(2^{l+1}) + \cdots + 1/(2^k)$. On peut en effet montrer que :

Proposition 22 *Soit* $\overrightarrow{du_i(\mathbf{x})}$ *le vecteur des dissatisfactions* ($du_i(\mathbf{x})_k = 1$ *si* $x_i \not\models \varphi^i_k$, $du_i(\mathbf{x})_k = 1 - w^i_k$ *sinon), et* $\overrightarrow{u_i(\mathbf{x})}$ *le vecteur des satisfactions* ($u_i(\mathbf{x})_k = w^i_k$ *si* $x_i \models \varphi^i_k$, $u_i(\mathbf{x})_k = 0$ *sinon). Il est vrai que :*

$$\overrightarrow{du_i(\mathbf{x})} <_{\min} \overrightarrow{du_i(\mathbf{y})} \implies uah_i(\mathbf{x}) < uah_i(\mathbf{y})$$

$$\overrightarrow{u_i(\mathbf{x})} <_{\max} \overrightarrow{u_i(\mathbf{y})} \implies uah_i(\mathbf{x}) < uah_i(\mathbf{y})$$

$$\overrightarrow{du_i(\mathbf{x})} <_{\text{leximin}} \overrightarrow{du_i(\mathbf{y})} \iff \overrightarrow{u_i(\mathbf{x})} <_{\text{leximax}} \overrightarrow{u_i(\mathbf{y})} \iff uah_i(\mathbf{x}) < uah_i(\mathbf{y})$$

Preuve : montrons d'abord l'équivalence $\overrightarrow{u_i(\mathbf{x})} <_{\text{leximax}} \overrightarrow{u_i(\mathbf{y})} \iff uah_i(\mathbf{x}) < uah_i(\mathbf{y})$. Par définition de $<_{\text{leximax}}$, $\overrightarrow{u_i(\mathbf{x})} <_{\text{leximax}} \overrightarrow{u_i(\mathbf{y})}$ est équivalent à
(1) $\exists k$ tel que (a) $\forall j < k, (x_i \models \varphi^i_j \iff y_i \models \varphi^i_j)$, (b) $x_i \not\models \varphi^i_k$ et (c) $y_i \models \varphi^i_k$.

(1) est équivalent à (2) $k(y,x) < k(x,y)$, où $k(y,x) = \min\{j \mid y_i \models \varphi^i_j$ et $x_i \not\models \varphi^i_j\}$ et $k(x,y) = \min\{j \mid x_i \models \varphi^i_j$ et $y_i \not\models \varphi^i_j\}$, avec la convention $\min\emptyset = +\infty$; cette équivalence venant du fait que pour tout j, il n'existe dans Δ_i qu'une unique formule de poids w^i_j. Pour cette même raison, on a $k(y,x) \neq k(x,y)$. Enfin, on a $uah_i(\mathbf{x}) - uah_i(\mathbf{y}) = A - B$, où $A = \sum\{\frac{1}{2^j} | j \leq |\Delta_i|, y_i \models \varphi^i_j, x_i \not\models \varphi^i_j\}$ et $B = \sum\{\frac{1}{2^j} | j \leq |\Delta_i|, x_i \models \varphi^i_j, y_i \not\models \varphi^i_j\}$. Utilisant maintenant le fait que $w^j_i = \frac{1}{2^j}$, on obtient les inégalités $\frac{1}{2^{k(y,x)}} \leq A < \frac{1}{2^{k(y,x)-1}}$ et $\frac{1}{2^{k(x,y)}} \leq B < \frac{1}{2^{k(x,y)-1}}$ (qui sont vraies même si $k(x,y) = +\infty$ ou $k(y,x) = +\infty$, avec les conventions $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$). Enfin, puisqu'on a $k(y,x) \neq k(x,y)$, on trouve finalement que $A > B$ si et seulement si $k(y,x) < k(x,y)$, d'où l'équivalence recherchée. L'implication $\overrightarrow{u_i(\mathbf{x})} <_{\max} \overrightarrow{u_i(\mathbf{y})} \implies uah_i(\mathbf{x}) < uah_i(\mathbf{y})$ en est un corollaire immédiat, puisque $\overrightarrow{u_i(\mathbf{x})} <_{\max} \overrightarrow{u_i(\mathbf{y})}$ implique $\overrightarrow{u_i(\mathbf{x})} <_{\text{leximax}} \overrightarrow{u_i(\mathbf{y})}$. Enfin, il est facile de voir que la preuve des résultats correspondants aux deux qui précèdent pour les fonctions de disutilité est calquée sur la leur (et nous l'omettons donc). □

Les demandes interchangeables peuvent être prises en compte de façon évidente : il suffit d'accorder un niveau d'utilité non à une demande élémentaire, mais à une disjonction de demandes (par exemple, si la seconde demande peut être satisfaite indifféremment par l'objet o_1 ou par l'objet o_2, on posera la demande $\langle o_1 \vee o_2, 1/4\rangle$). On peut même introduire de très légères préférences entre les éléments d'une demande interchangeable, en ajoutant à l'objet préféré un tout petit supplément d'utilité δ. Sans rentrer trop dans les détails, il faudra faire en sorte que la somme des deltas accordés soit strictement inférieure à $1/(2^k)$.

Les conjonctions de demandes élémentaires indissociables peuvent être traitées de la façon suivante : on attribue aux ℓ objets d'une conjonction $o_1 \wedge \cdots \wedge o_\ell$, ℓ niveaux de priorités successifs (qui ne pourront donc pas être attribués à d'autres demandes) et l'on ajoute à $\mathcal{C}$ une contrainte stipulant que si l'agent reçoit l'un de ces objets, alors il doir aussi recevoir les $\ell - 1$ autres.

7.2. *Calcul des utilités individuelles : le principe de profit*

Pour le mode commercial (revoir la description de ce mode en section 2), la somme s'impose pour l'agrégation des poids des demandes. Cependant, à la différence du mode hiérarchique, on utilisera des échelles de poids dont les niveaux ne sont plus étanches, par exemple $Lw_i = [0,1)$ ou bien $[0,100)$, bref $[0, \top_{Lw_i})$, et on demandera à un agent de répartir ses poids de manière à ce que leur somme ne dépasse jamais le poids maximal $\top_{Lw_i}$. On utilisera une agrégation par la conorme $\min(x+y, \top_{Lw_i})$, strictement monotone sur l'échelle $Lua_i = [0, \top_{Lw_i}]$ (à condition de respecter la contrainte sur la somme maximale), et une normalisation, comme dans le cas hiérarchique.

Il est parfaitement possible de laisser les agents exprimer des choix disjonctifs, avec ou sans préférences mineures. On peut envisager de les laisser exprimer des choix plus complexes, par exemple des conjonctions, mais, en l'absence de contraintes sur l'attribution des poids, ceci laissera la porte ouverte à des manipulations (par exemple, mettre $\top_{Lw_i}$ sur la conjonction de tous les objets désirés).

7.3. *Calcul de l'utilité collective*

Au terme de la première phase, qu'elle soit hiérarchique ou commerciale, on obtient donc après normalisation un profil de satisfaction sur $Lua = [0, 1]^n$: ce sont les pourcentages de satisfaction de chaque agent. Nous désirons satisfaire à la fois le principe d'efficacité et le principe de Pigou-Dalton strict (pour prendre en compte l'équité). Nous avons vu, section 6.2, que plusieurs agrégateurs satisfont ces principes. Parmi ceux-ci, il nous semble que l'ordre leximin – traduisant une vision purement égalitariste dans laquelle on cherche à maximiser la satisfaction du moins satisfait des agents – convient le mieux pour comparer les vecteurs d'utilités individuelles (profils de satisfaction), dans le mode hiérarchique comme dans le mode commercial.

Informatiquement, puisque $Lua = [0, 1]$, on pourrait imaginer un codage de cet ordre par l'OWA de vecteur $\langle 1/\epsilon^n, 1/\epsilon^{(n-1)}, \ldots, 1/\epsilon\rangle$, où ϵ est le plus petit écart possible entre deux utilités individuelles différentes (dans le mode hiérarchique, si tous les agents posent k demandes, et que tous peuvent voir toutes leurs demandes satisfaites, $\epsilon = (2^{k+1} - 2^k)/(2^{k+1} - 1)$). Mais, à cause des problèmes d'arrondis, cette solution n'est pas toujours sûre et est déjà un peu compliquée. Autant préférer une comparaison lexicographique des vecteurs ordonnés.

8. Conclusions et perspectives

Un problème de partage est un creuset dans lequel se combinent des aspirations antagonistes : chaque agent cherche à maximiser sa propre satisfaction, tandis que collectivement, on recherche des décisions efficaces – c'est-à-dire exploitant au mieux les ressources – et équitables. Il s'agit là d'une variation, très simple, du vaste problème politico-économique récurrent et général, qui se pose à toute échelle : concevoir l'organisation d'une société assurant à la fois efficacité économique et justice sociale.

8.1. *Bilan*

Nous avons dans cet article proposé un modèle formel du problème de partage de biens indivisibles, sans possibilité de compensations monétaires, avec des contraintes d'admissibilité quelconques. Le modèle est basé sur trois niveaux d'utilité : utilité des demandes de chaque agent, basée sur une logique pondérée, utilité individuelle d'un agent devant un partage, et enfin utilité collective d'un partage, qu'il s'agit d'optimiser. Différentes lois d'agrégation de ces utilités ont été discutées, en relation avec des propriétés formelles caractérisant les notions d'efficacité et d'équité. Nous avons comparé agrégation de satisfactions et agrégation de dissatisfactions, et énoncé les conditions qui assurent l'équivalence de ces procédés. Enfin, nous avons montré l'application de ce modèle à un cas concret, celui du partage de ressources satellitaires. Nous ne prétendons pas avoir proposé le meilleur modèle, d'autres sont certainement possibles. Celui que nous avons proposé a l'avantage d'être simple et général. Il n'est pas figé : de nombreuses combinaisons sont encore envisageables, jouant sur les manières de passer d'un niveau d'utilité au suivant. Les choix précis doivent se faire en fonction de chaque application.

8.2. *État de l'art*

Le travail présenté dans cet article est à la croisée de plusieurs domaines de recherche : aide à la décision en présence de critères multiples, optimisation combinatoire sous contraintes, microéconomie.

8.2.1. *Propriétés formelles des procédures de partage*

Les microéconomistes s'intéressent depuis longtemps aux problèmes de partages équitables [BRA 96, MOU 88, MOU 95, YOU 94], le plus souvent dans des contextes autorisant des compensations monétaires, lorsque les biens sont divisibles, et avec des contraintes d'admissibilité très simples (par exemple la convexité). Quelques travaux commencent à émerger dans le cadre qui nous intéresse dans cet article (partage de biens indivisibles, sans compensation monétaire), par exemple [BRA 00].

Bien qu'ils y fassent abondamment référence, nos travaux n'apportent pas directement de nouveaux résultats concernant les propriétés formelles des procédures de partage. Nos travaux, qui relèvent avant tout de l'informatique (et en particulier de la recherche opérationnelle et de l'intelligence artificielle) peuvent être vus comme des cadres de représentation et de calcul pour des problèmes de partage centralisés, sans compensation monétaire, avec fonctions d'utilités définies sur une échelle commune (mais non monétaire) aux différents agents.

8.2.2. *Langages de représentation pour des problèmes de partage*

Si les microéconomistes se préoccupent des propriétés formelles des procédures de partage, en établissant par exemple des résultats montrant que la satisfaction conjointe de certains ensembles de propriétés n'est pas possible (théorèmes d'impossibilité), ils se sont moins intéressés à leurs aspects informatiques. Ces derniers sont de deux ordres différents : il s'agit non seulement d'étudier la complexité des problèmes de partage de ressources et de construire des algorithmes de calcul effectif d'un partage, mais aussi de définir des **langages de représentation compacte pour l'expression de tels problèmes**. En effet, comme on l'a vu en section 3, dans le cas général, exprimer de façon **explicite** les préférences d'un agent sur les différentes combinaisons d'objets demande, dans le cas général, une structure de données de taille exponentielle en fonction du nombre d'objets ; les **langages de représentation compacte de préférences** visent justement à limiter, autant que faire se peut, la taille requise pour l'expression de préférences sur un espace de choix à forte combinatoire (ici, l'espace des combinaisons d'objets possibles). Le langage proposé section 3, qui utilise des demandes pondérées, permet en pratique[9] d'exprimer les préférences de chaque agent de manière bien plus concise que ne le ferait une représentation explicite.

Citons plus précisément quelques travaux sur la représentation compacte de préférences qui sont en rapport avec nos travaux :

– Le cadre des **enchères combinatoires** [RAS 82, ROT 98], évoqué dans l'exemple 4, apparaît comme un cas particulier de problème de partage, dans lequel il existe des contraintes de préemption (un objet ne peut être vendu qu'à un seul agent) et dans lequel il n'y a pas *a priori* d'exigence d'équité ; des langages d'enchères permettant l'expression concise des prix qu'un acheteur est prêt à payer pour chaque combinaison de prix ont été récemment proposés [NIS 00, BOU 01] ; en particulier, [BOU 01] partage avec notre modèle l'utilisation de demandes pondérées exprimées en logique propositionnelle.

– Des langages logiques pour la représentation compacte de fonctions d'utilité individuelles ou collectives, à base de logiques pondérées, sont proposés dans [LAF 00] ; le modèle de la section 4.1 en est une adaptation au cas des problèmes de partage.

– La **fusion de bases de croyances (ou de préférences)** (par exemple [KON 98]) a en commun avec notre approche le caractère compact de l'*input* (les croyances ou préférences sont exprimées à l'aide de formules propositionnelles) ; en outre, la fusion à base de distances dans [KON 02] procède, comme notre approche, en deux phases d'agrégation successives. La différence essentielle est dans le type de tâches visées : l'*output* d'un processus de fusion est vu en termes d'inférence (on cherche à décider si une formule particulière est vraie dans la base fusionnée) tandis que les problèmes de partage et d'enchères sont, eux, orientés vers le calcul d'une solution optimale.

– Le modèle VCSP (*Valued Constraint Satisfaction Problem*) [BIS 99] permet lui aussi l'expression compacte de fonctions d'utilité, cette fois dans un cadre différent de la logique propositionnelle. Ce modèle combine l'expression de contraintes impératives avec l'agrégation de préférences par des opérateurs monotones ; une algorithmique spécialisée se développe dans ce cadre (voir aussi le second article [FAR 04]).

– Un travail antérieur [LEM 99], abordant un problème très proche, propose un modèle différent, dans lequel l'équité est mesurée par un critère indépendant (les profils de satisfaction ont une composante supplémentaire représentant le degré d'équité du partage).

8.2.3. *Complexité et algorithmique*

La complexité algorithmique et la construction d'algorithmes effectifs pour la résolution pratique de problèmes de partage de biens indivisibles est fortement liée au domaine plus général de l'algorithmique de problèmes combinatoires, abondamment étudiée en recherche opérationnelle et en intelligence artificielle. L'état de l'art dans ce domaine sera évoqué dans le second article [FAR 04].

9. Même si, **dans le pire des cas**, l'espace requis pour représenter les préférences d'un agent peut être exponentiel.

8.3. *Perspectives*

Enfin, ce travail a soulevé de nombreux points intéressants, souvent difficiles, qui motivent des recherches futures. En voici quelques-uns.

– Les problèmes concrets de partage sont souvent répétitifs : on doit résoudre des instances successives du problème. C'est le cas de notre application. Cette caractéristique amène la possibilité de **compensations temporelles** entre instances, de façon à augmenter l'équité globale des partages successifs. Comment définir une équité qui traverse la dimension temporelle ? Comment calculer ces compensations temporelles ?

– En section 5 nous avons opposé agrégation d'utilités (désirs satisfaits) et agrégation de désutitilités (besoins non satisfaits). On pourrait chercher à combiner ces notions dans une **échelle bipolaire** au lieu de les opposer.

– Nous avons considéré dans cet article le seul partage de biens. Il serait intéressant d'étendre le modèle au **partage simultané de biens et de charges**.

– De la littérature classique sur le partage (voir la bibliographie) émergent différentes caractérisations formelles de l'équité, telles que l'absence d'envie (*envy-freeness*), la juste part (*fair-share*). Bien qu'elles soient moins pertinentes dans le contexte de biens indivisibles et sans compensation monétaire, il serait intéressant de raccorder ces notions à notre modèle.

– Nous avons considéré des agents ayant des droits égaux. Or, souvent les agents ont contribué dans des proportions différentes à l'acquisition des ressources communes. Comment définir un **partage équitable en présence de droits inégaux** ?

– Les agents ne sont pas nécessairement sincères lorqu'ils déposent et pondèrent leurs demandes. Peuvent-ils en jouer pour tenter d'accroître leurs parts au détriment des autres ? Est-il possible de trouver des règles de partage résistant à cette menace ? Cette question des **manipulations** de règles de partage s'avère assez délicate (voir une analyse et des réponses partielles dans [LEM 02]).

Remerciements

Les auteurs remercient MM. Nicolas Bataille et Jean-Michel Lachiver du Centre National d'Études Spatiales de Toulouse, à l'origine de l'application décrite dans cet article, pour les nombreuses discussions et idées échangées à l'occasion d'un travail commun sur cette application. Ils remercient également les relecteurs de TSI dont le travail a permis d'améliorer la qualité de cet article.

9. Bibliographie

[BIS 99] BISTARELLI S., MONTANARI U., ROSSI F., SCHIEX T., VERFAILLIE G., FARGIER H., « Semiring-Based CSPs and Valued CSPs : Frameworks, Properties and Comparison », *Constraints*, vol. 4, n° 3, 1999, p. 199-240.

[BOU 01] BOUTILIER C., HOOS H. H., « Bidding languages for combinatorial auctions », *Proc. of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01)*, Seattle, Washington, USA, August 2001, p. 1211-1217.

[BRA 96] BRAMS S. J., TAYLOR A. D., *Fair Division – From cake-cutting to dispute resolution*, Cambridge University Press, 1996.

[BRA 00] BRAMS S. J., EDELMAN P. H., FISHBURN P. C., *Paradoxes of Fair Division*, Economic Research Reports RR 2000-13, June 2000.

[DEC 92] DECHTER R., « Constraint Networks », SHAPIRO S., Ed., *Encyclopedia of Artificial Intelligence*, p. 276-285, John Wiley & Sons, 1992.

[DUB 96] DUBOIS D., FARGIER H., PRADE H., « Refinements of the maximin approach to decision-making in fuzzy environment », *Fuzzy Sets and Syst.*, vol. 81, 1996, p. 103-122.

[DUB 97] DUBOIS D., FARGIER H., PRADE H., « *The Ordered Weighted Averaging Operators, Theory and Applications* », chapitre Beyond Min Aggregation in Multicriteria Decision ; (Ordered) Weighted Min, Discri-Min, Leximin, p. 181-192, Kluwer, 1997.

[FAR 04] FARGIER H., LANG J., LEMAÎTRE M., VERFAILLIE G., « Partage équitable de ressources communes (2) : Éléments de complexité et d'algorithmique », *Technique et Science Informatiques*, vol. 23, n° 9, 2004, p. 1219-1238, Lavoisier.

[KON 98] KONIECZNY S., PINO-PÉREZ R., « On the logic of merging », *Proceedings of KR'98*, 1998, p. 488-498.

[KON 02] KONIECZNY S., LANG J., MARQUIS P., « Distance-based merging : a general framework and some complexity results », *Proceedings of KR2002*, 2002, p. 97-108.

[LAF 00] LAFAGE C., LANG J., « Logical representation of preferences for group decision making », *Proc. of the 7th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR2000)*, Breckenridge, CO, USA, April 2000, p. 457-468.

[LEM 99] LEMAÎTRE M., VERFAILLIE G., BATAILLE N., « Exploiting a Common Property Resource under a Fairness Constraint : a Case Study », *Proc. of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-99)*, Stockholm, Sweden, 1999, p. 206-211.

[LEM 02] LEMAÎTRE M., VERFAILLIE G., FARGIER H., LANG J., Guidage et partage des satellites Pléiades, étude de protocoles de partage, rapport RF 4/06079 DCSD, ONERA Centre de Toulouse et IRIT, Mars 2002.

[MAC 92] MACKWORTH A., « Constraint Satisfaction », SHAPIRO S., Ed., *Encyclopedia of Artificial Intelligence*, p. 285-293, John Wiley & Sons, 1992.

[MOU 88] MOULIN H., *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press, 1988.

[MOU 95] MOULIN H., *Cooperative Microeconomics, A Game-Theoretic Introduction*, Prentice Hall, 1995.

[NIS 00] NISAN N., « Bidding and allocations in combinatorial auctions », *ACM Conference in Electronic Commerce (EC-2000)*, Minneapolis, 2000.

[RAS 82] RASSENTI S., SMITH V., BULFIN R., « A combinatorial auction mechanism for airport time slot allocation », *Bell Journal of Economics*, vol. 13, 1982, p. 402-417.

[ROS 94] ROSENSCHEIN J. S., ZLOTKIN G., *Rules of encouter : Designing conventions for automated negotiation among computers*, MIT Press, Cambrigde, Mass., 1994.

[ROT 98] ROTHKOPF M. H., PEKEČ A., HARSTAD R. M., « Computationally manageable combinatorial auctions », *Management Science*, vol. 44, n° 8, 1998, p. 1131-1147.

[ROY 93] ROY B., BOUYSSOU D., *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas*, Economica, 1993.

[VIN 89] VINCKE P., *L'aide multicritère à la décision*, Ellipses, Bruxelles, 1989.

[YAG 88] YAGER R., « On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making », *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 18, 1988, p. 183-190.

[YOU 94] YOUNG H. P., *Equity in Theory and Practice*, Princeton University Press, 1994.

Article reçu le 22 décembre 2002
Version révisée le 12 décembre 2003
Rédacteur responsable : Jean-Claude Konig